

Resum

Les configuracions singulars dels robots són situacions complicades de predir i de localitzar de manera anticipada i, en general, associades a un mal comportament, tot i que també s'aprofita el factor d'amplificació que provoquen a l'extrem mòbil en alguns casos per a facilitar el moviment. Aquestes singularitats es donen quan no hi ha una correspondència unívoca entre les restriccions de moviment sobre l'extrem mòbil i les restriccions que s'estan imposant sobre les diferents cadenes cinemàtiques que permeten moure aquest extrem, que es tradueix en que el robot guanya o perd graus de llibertat. Al ser difícils de predir o de saber a on es troben aquestes singularitats, resulta molt útil tenir una eina que doni una noció de proximitat d'un manipulador a una configuració singular. Molts índexos que ja existeixen i que s'usen en aquest camp no resolen totalment el problema perquè, apart de ser índexos locals que només serveixen per a casos concrets de manipuladors o poses, són subjectes a canvis de normes i a les unitats escollides, de manera que no donen una noció real de proximitat, a més de no tenir cap interpretació física. En aquest projecte es presenten dos índexos vectorials que poden tenir utilitat per a mesurar aquesta proximitat: l'angle amb el pla singular i la distància a la recta polar. Es tracta de dos nous índexos vectorials globals que, per tenir una interpretació clara en l'espai ambient del robot permeten comparar dues posicions de dos manipuladors diferents en termes de proximitat a les singularitats. A més de presentar aquests dos índexos vectorials i d'estudiar les seves propietats s'avalua, obtenint resultats molt positius, la seva utilitat per a mesurar proximitat a les singularitats en termes de l'estàtica, és a dir de comparar dues posicions o dos camins sense tenir en compte les velocitats que hi intervenen. Aquesta avaluació s'il·lustra amb quatre simulacions representatives de diferents manipuladors específicament dissenyades per aquest anàlisi, en les que, o bé es deforma l'arquitectura dels manipuladors, o bé es realitza un moviment. Finalment es dissenya l'estudi posterior per avaluar la cinemàtica i s'exploren altres camps d'aplicació per a aquests dos índexos.

Índex

Índex de figures	5
Glossari	7
1 Introducció	9
2 Identificació del problema	11
2.1 Plataformes de Stewart-Gough	11
2.2 Antecedents i motivació	15
2.2.1 Índex de manipulabilitat	16
2.2.2 Nombre de condició	16
2.3 Singularitats i rigidesa	17
3 Coordenades de Plücker i singularitats	19
3.1 Immersió de Plücker	19
3.2 Quàdriques i correlacions	22
3.3 Complexos lineals	24
3.4 Interpretació cinemàtica dels complexos lineals	27
3.5 Seccions de la Grassmanniana	31
3.5.1 Rang 1: El punt	32
3.5.2 Rang 2: Seccions amb rectes	32
3.5.3 Rang 3: Seccions planes	32
3.5.4 Rang 4: Seccions amb subvarietats 3-dimensionals	34
3.5.5 Rang 5: Complexos lineals	34
4 Proposta de solució	37
4.1 Angle amb el pla singular	37
4.2 Distància d'una recta a la seva polar	40
5 Preàmbul de les simulacions	43
5.1 Disseny dels experiments	43
5.2 Mesures de referència	43
5.2.1 Determinant de la matriu jacobiana	44
5.2.2 Moment d'un actuator respecte d'un complex lineal	44

6	Anàlisi per a l'estàtica	47
6.1	Simulacions	47
6.1.1	Aproximació a una singularitat de rang 1	47
6.1.2	Aproximació a una singularitat de tipus 3D movent un sol actuator	49
6.1.3	Aproximació a una singularitat de tipus 3D	50
6.1.4	Aproximació a una singularitat de Hunt	52
6.2	Anàlisi general	54
7	Disseny de l'estudi posterior	57
7.1	Anàlisi per a la cinemàtica	57
8	Avaluació Econòmica	59
8.1	Pressupost	59
8.2	Justificació econòmica	60
9	Estudi d'impacte ambiental	61
	Conclusions i recomanacions	63
	Bibliografia	65
	Bibliografia Complementària	66
	Fonts de les figures	67
A	Proposicions	69
B	Simulació complementària	73
C	Programes en Matlab	75
C.1	Programa de càlcul de les coordenades de Plücker	75
C.2	Programa de càlcul de les mesures	75
C.3	Programa de la simulació 6.1.1	80
C.4	Programa de la simulació 6.1.2	80
C.5	Programa de la simulació 6.1.3	81
C.6	Programa de la simulació 6.1.4	82

Índex de figures

2.1	En ordre d'esquerra a dreta, exemple de plataforma de Stewart-Gough 3-3 planar (tres anclatges mòbils i tres fixos) i robot sèrie amb sis eixos.	12
2.2	Plataforma de Stewart-Gough general amb anclatges fixos A_i i anclatges mòbils B_i	13
2.3	Relació entre les forces dels actuadors i la força i el moment resultants en el punt O d'una plataforma de Stewart-Gough.	18
3.1	Moviment helicoïdal d'eix A ($x = y = 0$) i raó p	27
3.2	Pla dels camins normals en x al moviment helicoïdal d'eix A (rectes que passen per x i són perpendiculars a $v(x)$).	30
3.3	Les diferents varietats que estan completament incloses dins de la Grassmanniana i les seves antiimatges per l'immersió de Plücker. On (B) és una recta de \mathbb{P}^5 completament inclosa a \mathbb{G} , i (C) i (D) son plans completament continguts però de diferents tipus.	31
3.4	Tres actuadors coplanaris i coincidents en un punt, es correspon amb una configuració singular de rang 2.	32
3.5	Quatre actuadors intersecant a tres mateixes rectes simultàniament, es correspon amb una configuració singular de rang 3 tipus 3A (regulus).	33
3.6	Quatre actuadors coincidents en un mateix punt, es correspon amb una configuració singular de rang 3, tipus 3D (regulus degenerat).	34
3.7	Sis rectes tallant a una recta, corresponent a una configuració de rang 5 (complex lineal especial).	35
6.1	En ordre d'esquerra a dreta i de dalt a baix: variació de l'angle, distància a la polar, moment i determinant de la jacobiana per un manipulador d'una arquitectura concreta que s'apropa a una singularitat de rang 1.	48
6.2	En ordre d'esquerra a dreta i de dalt a baix: variació de l'angle, distància a la polar, moment i determinant de la jacobiana per un manipulador que s'apropa a una singularitat de tipus 3D seguint una trajectòria rectilínea.	50
6.3	En ordre d'esquerra a dreta i de dalt a baix: variació de l'angle, la distància a la polar, el moment i determinant de la jacobiana per un manipulador que s'apropa a una singularitat de tipus 3d fent quatre actuadors tendir al seu baricentre.	51

6.4	Arquitectura corresponent a la simulació 6.1.4.	52
6.5	En ordre d'esquerra a dreta i de dalt a baix: variació de les mesures de l'angle, la distància a la polar, el moment i el determinant de la jacobiana en una simulació d'una singularitat de Hunt (tipus 5B).	53
B.1	Variació de l'angle per a la mateixa configuració del manipulador variant, sobre la mateixa recta, la posició de l'anclatge fix corresponent a l'actuador \mathcal{A}_1 . . .	73

Glossari

S'introdueix part de la notació per a facilitar l'enteniment.

\mathbb{P}^n Espai projectiu n -dimensional.

\dot{X} Derivada de la variable X respecte el temps.

\times Producte vectorial clàssic.

\mathbf{p} Coordenades del punt p .

$|\mathbf{S}|$ Determinant de la matriu \mathbf{S} .

\mathbf{q}^T Transposta de la matriu \mathbf{q} .

\cdot Operació de producte escalar amb la matriu de la mètrica igual a la identitat.

$\mathbf{p}(l)$ Coordenades de Plücker de la recta l .

\mathbf{J} Matriu Jacobiana.

\mathbb{G} Grassmanniana.

$\alpha_i(\mathcal{K})$ angle amb el pla singular de l'actuador i per a la configuració \mathcal{K} .

$\delta_i(\mathcal{K})$ distància a la recta polar de l'actuador i per a la configuració \mathcal{K} .

Capítol 1

Introducció

Un dels problemes centrals en robòtica és determinar les configuracions singulars dels robots, ja que en el seu entorn es perd el control d'aquests. A prop d'una singularitat es poden produir forces molt grans a les juntes dels robots que poden ocasionar que s'espallin. Per aquest motiu es tendeix a evitar les singularitats; tot i això, hi ha situacions en que la seva proximitat pot ser molt útil per a aprofitar el factor d'amplificació a l'extrem mòvil a partir de lleugeres modificacions en els actuadors, com és el cas de robots paral·lels usats com a sensors (com ara en pròtesis de genoll per a avaluar el seu rendiment) o com aparells de posicionament de precisió (d'utilitat en cirurgia ortopèdica, per exemple). En els robots industrials, les configuracions singulars són ben conegudes perquè es tracta de robots d'arquitectures simplifiades amb juntes coincidents, que els fan difícils de construir.

En aquest projecte s'estudiaran les configuracions singulars dels manipuladors paral·lels. Amb aquesta finalitat, els objectius del projecte passaran per presentar, des del punt de vista algebraic, propietats geomètriques de les Grassmannianes que ajudin a entendre i caracteritzar les configuracions singulars, en particular s'estudiaran els complexos lineals. L'objectiu final del projecte serà introduir i, posteriorment, avaluar segons uns criteris de bondat, dos índexos vectorials o mesures, computables en temps real, que permetin donar una idea, global o local, de proximitat a una singularitat i que tinguin una interpretació física. Aquesta avaluació posterior permetrà discernir entre si ressolen completament o no, l'estàtica, és a dir si permeten comparar, en termes de proximitat a les singularitats, dues poses d'un mateix manipulador o bé dues configuracions de manipuladors de diferents arquitectures (sense tenir en compte les velocitats). A més a més a més es dissenyarà l'estudi per a avaluar la seva utilitat en l'anàlisi cinemàtic i s'introduiran altres possibles camps d'aplicació.

Finalment mencionar que aquestes mesures, i el desenvolupament que es realitza al llarg del projecte tenen aplicació tant per a robots sèrie com per a robots paral·lels, a causa de la seva dualitat: així com un braç robòtic es troba en una configuració singular quan un dels eixos de rotació de les seves juntes està en una posició redundant respecte de la resta, una singularitat en un robot paral·lel es dona quan una de les seves potes està en una posició redundant respecte a les demés. Per tal de no allargar el discurs, aquesta proposta se centrarà únicament en robots paral·lels, però el seu impacte s'estén també a robots en sèrie (braços robòtics), i per això el seu potencial d'aplicació és molt ampli.

Capítol 2

Identificació del problema

2.1 Plataformes de Stewart-Gough

Els robots paral·lels són una classe de manipulador d'una arquitectura molt concreta. Consten de dos cossos, un fix i un altre mòbil, units per un conjunt de cadenes cinemàtiques disposades en paral·lel (és el que els diferencia dels robots en sèrie). Les plataformes de Stewart-Gough estan unides per sis cadenes cinemàtiques (per això mateix també s'anomenen hexàpodes) que estan disposades de manera que l'actuador és una junta prismàtica, que no és més que una barra extensible sobre la que s'actua, amb una junta esfèrica a cada extrem. Aquestes barres s'uneixen a cada cos o plataforma (la plataforma de la base és fixa i la plataforma superior és mòbil) per mitjà d'aquestes juntes esfèriques, que són les articulacions que permeten que la unió es faci en qualsevol direcció. El control del moviment de la plataforma superior es realitza fixant la longitud d'aquests sis actuadors. Les plataformes de Stewart-Gough planars són un cas particular en què els anclatges fixos, que són les unions dels actuadors amb la plataforma fixa, estan situats tots en un mateix pla, i els mòbils, que són les unions dels actuadors amb la plataforma mòbil, en un altre.

Entre les aplicacions de les plataformes de Stewart-Gough es troben els simuladors de vol, la cirurgia ortopèdica i posicionament dels satèl·lits. Els actuadors solen ser hidràulics i les juntes es poden modelar com a juntes esfèriques. A continuació es pot observar un exemple de plataforma de Stewart-Gough i de robot sèrie, la relació de dualitat que existeix entre tots dos permet aplicar tot l'estudi que s'ha realitzat a aquest segon tipus de robots, ampliant en gran mesura el seu camp d'aplicació.



Figura 2.1: En ordre d'esquerra a dreta, exemple de plataforma de Stewart-Gough 3-3 planar (tres anclatges mòbils i tres fixos) i robot sèrie amb sis eixos.

En general, la plataforma superior d'un robot paral·lel té sis graus de llibertat; tres graus de llibertat per la posició, i tres per l'orientació. Per tant caldrà, almenys, sis condicions perquè la seva configuració, donada per la posició, $\mathbf{p} = (p_x, p_y, p_z)$ i l'orientació $\mathbf{R} = (\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z)$ quedi determinada. Mencionar que l'orientació es parametritza mitjançant les representacions en *grup de Lie* del Grup Euclidià Especial, o els *bi-quaternions*. Aquests mètodes de representació han de ser mètodes global i geomètricament ben definits. Cosa que no es pot dir de descripcions com ara els *angles d'Euler*, que únicament permeten representacions locals i no són tan potents com els mètodes citats anteriorment. A més a més, és important tenir en compte que les representacions minimal (és a dir, que tenen exactament tres paràmetres) de l'orientació no són robustes i, per tant, introdueixen singularitats intrínseques a la formulació que no són pròpies del manipulador.

L'estudi de la *cinemàtica directa* d'un robot és l'estudi de la posició de les seves parts a partir de les posicions de les seves components. En el cas d'una plataforma de Stewart-Gough es correspondria amb l'estudi de la configuració del cos superior a partir de les longituds de les barres.

Per altra banda, la *cinemàtica inversa* és el cas oposat, és a dir, conèixer quina posició de les seves components porta a una configuració determinada en les seves parts. En el cas d'una plataforma de Stewart-Gough consistirà a conèixer les longituds de les barres a partir d'una configuració determinada.

Com s'intueix per la seva geometria, l'estudi de la cinemàtica directa dels robots paral·lels és molt més complicat que en el cas de braços robòtics. I, de fet, és un problema obert per al cas més general. És a dir, donat un conjunt de longituds, trobar la configuració que faci que els actuadors tinguin la longitud que els correspon significarà resoldre el sistema (2.1), que s'introdueix a continuació, i és una equació difícil de resoldre. En canvi, la cinemàtica inversa és trivial: donada una configuració del manipulador, trobar les longituds de les potes, és simplement calcular les distàncies entre els dos extrems dels actuadors.

La dualitat entre robots sèrie i paral·lels fa que per als braços robot siguin complicades la cinemàtica inversa i la interpretació geomètrica de les singularitats. És per això que s'opta industrialment per dissenys de robots desacoblats (en els que grups d'actuadors determinen independentment la posició o l'orientació de l'extrem mòbil), que comporta la intersecció d'alguns eixos de rotació de juntes, dificultant la seva implementació mecànica, fet que encareix

la seva construcció.

Per a una plataforma de Stewart-Gough, l'estudi de la cinemàtica directa consisteix a determinar la posició $\mathbf{p} = (p_x, p_y, p_z)$ i l'orientació $\mathbf{R} = (\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z)$ de la plataforma mòbil, que és equivalent a trobar la posició dels sis anclatges mòbils, b_i , esquematitzat segons la figura 2.2. De manera que caldrà determinar b_i a partir de les longituds dels actuadors, l_i . Per tant, si a_i són els anclatges fixos de la plataforma, de posició coneguda i b_i els mòbils i donades l_i , les longituds de cadascun dels actuadors per $i = 1, \dots, 6$, la configuració resultant vindrà donada solució sistema següent:

$$\|a_i - b_i\|^2 = l_i^2, \quad (2.1)$$

on a_i és l'extrem inferior (amb la posició fixada) de la barra i -essima, i b_i , l'extrem superior. El nombre màxim de solucions de l'equació (2.1) per a (\mathbf{p}, \mathbf{R}) s'anomena *nombre de modes d'ensamblatge*.

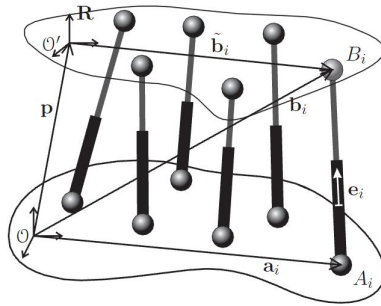


Figura 2.2: Plataforma de Stewart-Gough general amb anclatges fixos A_i i anclatges mòbils B_i .

Les definicions formals dels conceptes que s'han introduït són les següents:

Definició 2.1.1. Una *junta d'unió* és un element que permet la unió entre dos sòlids rígids, així com el conjunt de condicions que s'imposen sobre aquesta unió.

Les plataformes de Stewart-Gough únicament fan servir *juntes prismàtiques* i *juntes esfèriques*. Les primeres són barres extensibles, i les segones són juntes puntuals orientables en qualsevol direcció de l'espai. Tot i que les juntes prismàtiques tenen un allargament màxim i mínim, es considerarà, a nivell teòric, que poden assolir qualsevol longitud.

Definició 2.1.2. Una *cadena cinemàtica* és un conjunt de juntes d'unió enllaçades entre sí. No tenen per què formar un cicle, és a dir les juntes dels extrems no tenen per què estar unides.

Definició 2.1.3. Una junta d'unió és *actuada* si es té control sobre les condicions que imposa, per exemple en el cas d'una junta prismàtica, voldrà dir que és possible fixar la seva longitud, o en el cas d'una junta esfèrica, que és possible fixar la seva orientació. Un *actuador prismàtic* és una junta prismàtica actuada

Definició 2.1.4. Una *articulació* és la junta que fa d'unió entre una cadena cinemàtica i una de les plataformes del manipulador.

Normalment les articulacions es classifiquen segons les unions que permeten, en el sentit que restringeixen les direccions en les que s'uneix la cadena cinemàtica. Com seria el cas d'una articulació que únicament permet que la unió sigui en un pla, de manera que l'extrem al que s'uneix sempre s'hauria de trobar en aquest pla i només es permetrien moviments a sobre d'aquest pla.

Definició 2.1.5. Una *junta esfèrica* és un tipus particular de junta d'unió que, quan fa d'articulació, la única condició que imposa sobre la unió és que es faci en un punt fixat del sòlid rígid en el que es realitza aquesta la unió. És a dir, idealment la unió pot ser en qualsevol direcció sempre i quan tingui lloc en aquell mateix punt i, per tant, tots els moviments estan permesos. Poden ser o bé la unió de dues juntes cilíndriques, o bé una esfera amb rodaments que s'uneix a una peça fixa. A la realitat únicament es permet un rang de moviments que pot variar segons com estigui dissenyada la junta.

A partir d'ara, a no ser que s'indiqui el contrari, quan hi hagi mencions d'actuadors o potes o barres, s'estarà fent una referència a la definició de barra extensible. I quan hi hagi mencions a articulacions, juntes o anclatges, s'estarà fent una referència a la definició 2.1.5. Es distingirà el cas d'*anclatges fixos*, o *anclatges mòbils* segons estiguin situats a la plataforma fixa o a la mòbil, respectivament.

El sistema d'equacions (2.1) es pot reescriure com una relació implícita entre la longitud de les potes, $\Theta = (l_1, \dots, l_6)$ i la configuració de la plataforma, definida per la posició i l'orientació, $\mathbf{X} = (p_x, p_y, p_z, \alpha_x, \alpha_y, \alpha_z)$, de manera que:

$$F(\mathbf{X}, \Theta) = 0. \quad (2.2)$$

Derivar aquesta expressió respecte el temps condueix a:

$$\mathbf{P}\dot{\mathbf{X}} + \mathbf{S}\dot{\Theta} = 0, \quad (2.3)$$

amb $\mathbf{P} = \frac{\partial F}{\partial \dot{\mathbf{X}}}$ i $\mathbf{S} = \frac{\partial F}{\partial \dot{\Theta}}$. Atenent a la seva caracterització en base a això, existeixen tres tipus de singularitats, classificades al 1990 per Gosselin i Angeles [6].

- Tipus I (o singularitats de sèrie): Es donen quan $|\mathbf{S}| = 0$. Succeeixen quan el manipulador arriba a l'extrem de la regió de treball. En aquestes singularitats existeix un valor no nul, $\dot{\Theta}$, pel qual $\dot{\mathbf{X}} = 0$. En altres paraules, existeixen velocitats que no es poden reproduir. Es podria dir que a les singularitats de tipus I, el manipulador perd graus de llibertat.
- Tipus II (o singularitats en paral·lel): Apareixen quan $|\mathbf{P}| = 0$. Això passa quan, dins de la regió de treball, la plataforma és localment mòbil encara que els actuadors estiguin fixats. Això és que, si $\dot{\Theta} = 0$, $\dot{\mathbf{X}}$ no és necessàriament zero. A les singularitats de tipus II, el manipulador guanya graus de llibertat.
- Tipus III: Succeeixen quan tots dos s'anul·len, és a dir: $|\mathbf{P}| = |\mathbf{S}| = 0$

L'equació (2.3) es pot reformular fent servir la matriu jacobiana, això és, la matriu que relaciona les velocitats de les juntes dels actuadors amb les velocitats lineals i angulars de la plataforma. Llavors l'equació (2.3) quedarà de la següent manera:

$$\dot{\Theta} = \bar{J}^{-1} \dot{X}. \quad (2.4)$$

Si \bar{J}^{-1} és singular, aleshores existeix $\dot{X} \neq 0$ que fa que $\dot{\Theta}$ sigui zero. La matriu \bar{J}^{-1} es pot escriure en termes de P i S com $\bar{J}^{-1} = -S^{-1}P$, però, donat que a les plataformes de Stewart-Gough passa que $S = \text{Diag}(l_1, \dots, l_6)$, l'estudi de les singularitats s'acaba reduint a l'estudi de la matriu P (singularitats de tipus II) que, per abús de llenguatge, se l'anomena J .

Definició 2.1.6. La matriu J s'anomena *jacobiana*. Es diu que un manipulador es troba en una *configuració singular* quan es troba en una configuració que fa que el determinant de la matriu J sigui zero.

Com es pot observar per a aquest tipus de manipuladors en concret, les singularitats de tipus II són les que té interès estudiar. Dins de les singularitats de tipus II es defineix una singularitat arquitectònica com se segueix:

Definició 2.1.7. Un manipulador té una *singularitat arquitectònica* quan, sigui quina sigui la configuració dels actuadors, aquest es troba en una singularitat de tipus II. És a dir, la jacobiana sempre té determinant zero per qualsevol posició.

2.2 Antecedents i motivació

Les singularitats arquitectòniques tenen un interès especial de cara al disseny de plataformes de Stewart-Gough perquè es tracta d'una situació que cal evitar. No és l'únic factor a considerar en termes de disseny. S'introduiran dos conceptes que estan lligats mútuament.

Definició 2.2.1. La *precisió* d'un manipulador és l'error que es comet en el seu posicionament. Com més petit és aquest error, més precís és.

Definició 2.2.2. La *proximitat a una singularitat* és com de prop està un manipulador d'una configuració singular per a una configuració donada. Donar una definició acurada de què vol dir que una configuració donada sigui pròxima a una configuració singular és un problema molt difícil. Tot i que un manipulador es troba a l'espai euclidi, que és un espai en el que sí que està definida la noció de distància, a l'espai de configuracions d'un manipulador de Stewart-Gough no és possible definir una distància. Això, entre d'altres coses, passa perquè la cinemàtica directa d'aquest manipulador és molt complicada, i no és possible traslladar aquesta noció de distància de l'espai euclidi a l'espai de configuracions del manipulador. Part de l'objectiu de les seccions posteriors consistirà a intentar donar una solució parcial a aquest problema i donar una noció de distància a una configuració singular.

La precisió d'un robot i la proximitat a una singularitat són conceptes lligats, perquè el fet d'estar prop d'una configuració singular amplifica l'error que es comet en el posicionament, fet que va en detriment de la precisió del robot.

Dos índexos que s'han fet servir des de fa temps en robòtica [11] per a mesurar la precisió en robots en sèrie són la *l'índex de manipulabilitat* i el *nombre de condició*.

2.2.1 Índex de manipulabilitat

El propòsit de la manipulabilitat és quantificar la capacitat per transmetre velocitats, o en altres paraules, la destresa del robot. Donat un manipulador, és realista considerar que els errors de mesura de les juntes estan fitats i, conseqüentment, estaran fitats els errors de posicionament. La norma de la fita es pot triar arbitràriament ja que és lineal [11], i per tant un simple escalat permetrà determinar els errors de posicionament a partir dels errors trobats per una fita determinada en els errors de mesura de les juntes. Es triarà el valor 1 per aquesta fita de manera que:

$$\|\dot{\Theta}\| \leq 1. \quad (2.5)$$

Per (2.4) dóna lloc a

$$\dot{\mathbf{X}}^T \bar{\mathbf{J}}^{-T} \bar{\mathbf{J}}^{-1} \dot{\mathbf{X}} \leq 1. \quad (2.6)$$

Si s'usa la norma euclídea, aleshores (2.5) representa un cercle a l'espai dels errors de les juntes. El cercle es pot correspondre mitjançant la matriu $\bar{\mathbf{J}}^{-T} \bar{\mathbf{J}}^{-1}$ amb una el·lipse en l'espai de coordenades generalitzades d'errors. Més generalment, la correspondència transforma la hiperesfera de l'espai d'errors de juntes en un el·lipsoïde, habitualment anomenat *el·lipsoïde de manipulabilitat*, en l'espai de coordenades generalitzades d'errors. Una interpretació geomètrica clàssica d'aquesta relació ve donada pel cas 2-dimensional. El tamany i la forma de l'el·lipsoïde són índexos de l'amplificació entre els errors a l'espai de juntes i l'espai de coordenades generalitzades d'errors. Més precisament, les longituds dels eixos principals de l'el·lipsoïde, que corresponen al mínim i al màxim valor propi de $\bar{\mathbf{J}}^{-T}$ i $\bar{\mathbf{J}}^{-1}$, es consideren com la imatge del mínim i el màxim factor d'amplificació de velocitat. Yoshikawa [15] introdueix un índex de manipulabilitat per un robot en sèrie com:

$$m(\bar{\mathbf{J}}) = \sqrt{|\bar{\mathbf{J}} \bar{\mathbf{J}}^T|}. \quad (2.7)$$

Aquest és l'*índex de manipulabilitat* i es correspon amb el producte de les meitats de les longituds dels eixos de l'el·lipsoïde.

2.2.2 Nombre de condició

Es considera el sistema lineal de (2.4):

$$\bar{\mathbf{J}}^{-1} \dot{\mathbf{X}} = \dot{\Theta}.$$

Una possible mesura del factor d'amplificació de l'error expressa de quina manera un error relatiu en Θ es propaga a un error relatiu en \mathbf{X} . Es considera una norma $\|\cdot\|$ que compleixi la propietat:

$$\|\bar{\mathbf{J}}^{-1} \dot{\mathbf{X}}\| \leq \|\bar{\mathbf{J}}^{-1}\| \|\dot{\mathbf{X}}\|,$$

i, a partir de (2.4):

$$\frac{\|\dot{\mathbf{x}}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq \frac{\|\dot{\boldsymbol{\theta}}\| \|\bar{\mathbf{J}}\|}{\|\mathbf{x}\|},$$

per a finalment obtenir:

$$\frac{\|\dot{\mathbf{x}}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq \|\bar{\mathbf{J}}^{-1}\| \|\bar{\mathbf{J}}\| \frac{\|\dot{\boldsymbol{\theta}}\|}{\|\boldsymbol{\theta}\|}.$$

El factor d'amplificació de l'error, anomenat *nombre de condició* es defineix com:

$$\kappa(\bar{\mathbf{J}}) = \kappa(\bar{\mathbf{J}}^{-1}) = \|\bar{\mathbf{J}}^{-1}\| \|\bar{\mathbf{J}}\|. \quad (2.8)$$

Per acabar, mencionar que el nombre de condició dependrà de la norma matricial escollida.

Així doncs, els tres índexos que s'acostuma a fer servir són:

1. Determinant de la jacobiana, $|\mathbf{J}|$.
2. Índex de manipulabilitat, $m(\bar{\mathbf{J}})$.
3. Nombre de condició, $\kappa(\bar{\mathbf{J}})$.

A [11] es veu que la manipulabilitat i el nombre de condició són índexos poc apropiats per als robots paral·lels. No només això, sinó que a més a més no reflecteixen exactament la precisió en el posicionament del robot. I que, en conclusió els índexos de precisió globals que poden ser més apropiats són el càlcul del màxim error de posicionament, els seus valors mitjans i la seva variança. Tot i això suposa un repte dissenyar algorismes que calculin aquests índexos. De totes maneres, tampoc cal calcular el seu valor exacte, sempre que sigui possible fitar l'error de càlcul.

2.3 Singularitats i rigidesa

Per a donar una visió dinàmica que complementi la definició cinemàtica que s'ha donat del què són les configuracions singulars es considerarà una plataforma general en una posició arbitrària. Per com es fa la unió entre les potes i la plataforma, cada pota transmetrà la força en la direcció en la que està orientada, com s'esquematitza a la figura 2.3. Per tant, sigui \mathbf{f}_i el valor d'aquesta força per a la pota i , orientada en la direcció \mathbf{e}_i (\mathbf{e}_i , normalitzat), $1 \leq i \leq 6$ i \mathbf{f} el vector de posar aquestes magnituds en ordre segons com s'hagi anomenat cada pota. Es pren un punt O de la plataforma. Aleshores, el vector generalitzat de forces, \mathbf{F} (que conté la força i el moment resultants que s'apliquen a O de la plataforma) es calcula, a partir de \mathbf{f}_i com:

$$\mathbf{F} = \mathbf{P}\mathbf{f}. \quad (2.9)$$

Les tres primeres components de \mathbf{F} són la projecció de la força resultant a O sobre cadascun dels eixos de coordenades, i les tres últimes són la projecció del moment resultant a O sobre cadascun dels eixos coordenats. Així doncs, les tres primeres components es calcularan com: $\sum_i \mathbf{f}_i \mathbf{e}_i$, i les tres últimes es calcularan com: $\sum_i \mathbf{f}_i \mathbf{e}_i \times \mathbf{p}_i$, amb \mathbf{p}_i el vector que va de O a

l'articulació que fa d'unió entre la plataforma i la pota i . Tot plegat es pot escriure de manera compacta com:

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \dots & \mathbf{e}_6 \\ \mathbf{e}_1 \times \mathbf{p}_1 & \dots & \mathbf{e}_6 \times \mathbf{p}_6 \end{pmatrix} \mathbf{f}. \quad (2.10)$$

A on \mathbf{P} és la matriu d'aquesta equació (2.10) i per tant l'equació (2.9) es compleix. Les columnes d'aquesta matriu, \mathbf{V}_i , com es pot comprovar a partir de la definició que es dona més endavant en la secció 3.1, són les coordenades de Plücker de les rectes associades als actuadors.

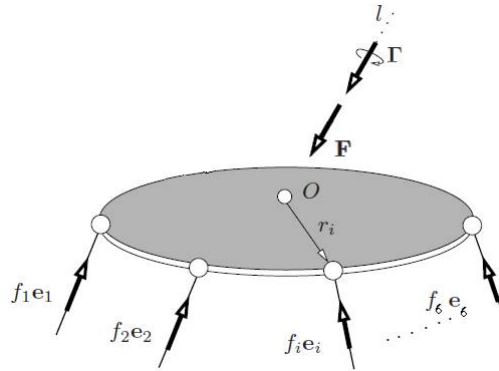


Figura 2.3: Relació entre les forces dels actuadors i la força i el moment resultants en el punt O d'una plataforma de Stewart-Gough.

A [10] es demostra que $\mathbf{P} = \mathbf{J}^T$, en particular que $|\mathbf{P}| = |\mathbf{J}|$. Com s'ha vist anteriorment a la secció 2.1, s'han definit les configuracions singulars com aquelles en què $|\mathbf{J}| = 0$, és a dir quan $|\mathbf{P}| = 0$. Aquest plantejament fet en base a l'estudi de les forces, permet veure que les configuracions singulars dels manipuladors paral·lels es corresponen amb configuracions en què no són rígids: les configuracions no singulars del manipulador són aquelles en què, amb els sis actuadors bloquejats, la plataforma queda fixa, i per tant el sistema es pot considerar com un sòlid rígid. Seguint aquest desenvolupament, si el sistema actuadors-plataformes és rígid vol dir que existeix un conjunt de forces articulars tals que la plataforma es manté en equilibri que, traduint-ho a la notació donada, significa que, en condicions de rigidesa, sigui quin sigui el vector de forces generalitzat, \mathbf{F} existeix un únic vector de forces articulars, \mathbf{f} que manté la plataforma en equilibri. Això, per l'equació (2.9), passarà si la matriu \mathbf{P} és de rang màxim (invertible), que és equivalent a dir que els \mathbf{V}_i , com a vectors de \mathbb{R}^6 són linealment independents. Per tant, caldrà estudiar les relacions de dependència entre les coordenades de Plücker de les rectes associades als actuadors.

Capítol 3

Coordenades de Plücker i singularitats

3.1 Immersió de Plücker

En aquest capítol es definiran les coordenades de Plücker, s'estudiaran les propietats que tenen i s'acabarà de perfilar la seva relació amb les configuracions singulars que ja s'ha introduït en el capítol anterior. Tots els resultats que es presenten i les seves demostracions estan extrets de [3]. Els raonaments s'han inclòs perquè formen la base teòrica i permeten contextualitzar els resultats de capítols posteriors. Aquest estudi es desenvolupa en el context de l'espai projectiu \mathbb{P}^3 perquè permet simplificar les relacions entre rectes. Es prendrà un sistema de referència Δ de \mathbb{P}^3 de manera que la inclusió de E^3 (l'espai euclidi de tres dimensions) en \mathbb{P}^3 ve donada per la immersió $(x, y, z) \mapsto [1, x, y, z]$ és a dir, els punts de \mathbb{P}^3 la primera coordenada s'anul·li són els punts del pla de l'infinit.

Donada una recta l de \mathbb{P}^3 , definida per dos punts diferents $\mathbf{a} = [a_0, a_1, a_2, a_3]$ i $\mathbf{b} = [b_0, b_1, b_2, b_3]$, es pren:

$$p_{ij} = \begin{vmatrix} a_i & a_j \\ b_i & b_j \end{vmatrix}, 0 \leq i < j = 0, \dots, 3. \quad (3.1)$$

Com que a i b no són el mateix punt, almenys un $p_{ij} \neq 0$. Les *coordenades de Plücker* de la recta vénen donades per $\mathbf{p}(l) = [p_{01}, p_{02}, p_{03}, p_{12}, p_{13}, p_{23}]$. Caldrà veure que aquestes coordenades no depenen de l'elecció dels punts per tal que estiguin ben definides.

Prenent dos punts diferents dels anteriors de la recta, $\mathbf{a}' = [a'_0, a'_1, a'_2, a'_3]$ i $\mathbf{b}' = [b'_0, b'_1, b'_2, b'_3]$. Llavors existeixen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ amb $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$ i que

$$\begin{aligned} \mathbf{a}' &= \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} \\ \mathbf{b}' &= \gamma\mathbf{a} + \delta\mathbf{b}. \end{aligned}$$

En forma matricial, i fent el determinant:

$$\begin{pmatrix} a'_i & a'_j \\ b'_i & b'_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_i & a_j \\ b_i & b_j \end{pmatrix}$$

$$p'_{ij} = \begin{vmatrix} a'_i & a'_j \\ b'_i & b'_j \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} p_{ij}.$$

S'obté:

$$\mathbf{p}' = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} \mathbf{p}.$$

Per tant, a l'espai projectiu \mathbb{P}^5 , $p' \equiv p$ i llavors les coordenades de Plücker estan ben definides. Aquestes coordenades defineixen una immersió, la *immersió de Plücker*, entre les rectes de \mathbb{P}^3 i el projectiu \mathbb{P}^5 . A més a més, els punts de la imatge pertanyen a la quàdrica definida per:

$$\mathbb{G} : p_{01}p_{23} - p_{02}p_{13} + p_{03}p_{12} = 0. \quad (3.2)$$

Aquesta quàdrica s'anomena *Grassmanniana*.

Observació 3.1.1. Per la definició que s'ha donat, la immersió de Plücker està associada a un sistema de referència Δ de \mathbb{P}^3 , qualsevol. Cal veure que es comporta bé amb els canvis de referència.

Sigui Δ un sistema de referència de \mathbb{P}^3 . Si \mathcal{G} denota el conjunt de totes les rectes de \mathbb{P}^3 , aleshores la immersió de Plücker és l'aplicació que envia cada recta l de \mathbb{P}^3 al punt de \mathbb{P}^5 tal que les seves coordenades són les coordenades de Plücker de l :

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_\Delta : \mathcal{G} &\rightarrow \mathbb{P}^5 \\ l &\mapsto [p_{i,j}]_{0 \leq i < j \leq 3} \end{aligned} \quad (3.3)$$

A més a més, si Δ' és un sistema de referència diferent de \mathbb{P}^3 , les immersions de Plücker \mathbf{p}_Δ i $\mathbf{p}_{\Delta'}$ són iguals mòdul una projectivitat de \mathbb{P}^5 , és a dir, existeix una projectivitat de \mathbb{P}^5 , ψ , tal que $\psi \circ \mathbf{p}_\Delta = \mathbf{p}_{\Delta'}$.

Aquesta última afirmació es demostra veient que tota projectivitat en \mathbb{P}^3 induïx una projectivitat en \mathbb{P}^5 . Es pren la recta generada pels punts a i b , $\mathbf{a} = [a_0, a_1, a_2, a_3]$ i $\mathbf{b} = [b_0, b_1, b_2, b_3]$ expressats segons el sistema de coordenades Δ , i siguin $p_{i,j}$, $0 \leq i < j \leq 3$, les seves coordenades de Plücker. Es pren \mathbf{S} la matriu de canvi de coordenades del sistema Δ a Δ' , de manera que si $\mathbf{a}' = [a'_0, a'_1, a'_2, a'_3]$ i $\mathbf{b}' = [b'_0, b'_1, b'_2, b'_3]$ són les coordenades de a i b a Δ' , aleshores es compleix que $\mathbf{a}' = \mathbf{S}\mathbf{a}$, i el mateix per a \mathbf{b}' i \mathbf{b} . Les components de les coordenades calculades en la referència Δ' seran amb determinants de la forma:

$$p'_{ij} = \begin{vmatrix} a'_i & a'_j \\ b'_i & b'_j \end{vmatrix}.$$

Per altra banda, es consideren les files de la matriu \mathbf{S} de manera que $\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \mathbf{s}_0 \\ \mathbf{s}_1 \\ \mathbf{s}_2 \\ \mathbf{s}_3 \end{pmatrix}$.

Aplicant això a la relació entre les coordenades de Δ i Δ' s'obté que $a'_i = \mathbf{s}_i \cdot \mathbf{a}$, i anàlogament per a b'_i . De manera que el determinant anterior quedarà com:

$$p'_{i,j} = \begin{vmatrix} \mathbf{s}_i \cdot \mathbf{a} & \mathbf{s}_j \cdot \mathbf{a} \\ \mathbf{s}_i \cdot \mathbf{b} & \mathbf{s}_j \cdot \mathbf{b} \end{vmatrix}.$$

Desenvolupant aquests productes es pot comprovar que s'acaba obtenint una combinació lineal dels $p_{i,j}$, arribant a que $p'_{i,j} = \psi(p_{i,j})$, amb ψ una projectivitat.

Proposició 3.1.2. *La immersió de Plücker és una bijecció entre les rectes \mathbb{P}^3 i la Grassmanniana, \mathbb{G} .*

Demostració. Primer es veurà que la imatge de la immersió de Plücker està a \mathbb{G} . Siguin $p_{i,j} = a_i b_j - a_j b_i$, $0 \leq i < j \leq 3$, les coordenades de Plücker de la recta generada per $\mathbf{a} = [a_0, a_1, a_2, a_3]$ i per $\mathbf{b} = [b_0, b_1, b_2, b_3]$.

Expandint aquests dos punts com un determinant, s'obté que,

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Això dóna lloc a $p_{0,1}p_{2,3} - p_{0,2}p_{1,3} + p_{0,3}p_{1,2} = 0$ i es demostra que totes les imatges per l'aplicació són punts de \mathbb{G} .

Ara queda veure l'altra inclusió. Sigui $p \in \mathbb{P}_5$, que té coordenades $p_{i,j}$, $0 \leq i < j \leq 3$, satisfent l'equació de \mathbb{G} i sigui la matriu

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & p_{0,1} & p_{0,2} & p_{0,3} \\ -p_{0,1} & 0 & p_{1,2} & p_{1,3} \\ -p_{0,2} & -p_{1,2} & 0 & p_{2,3} \\ -p_{0,3} & -p_{1,3} & -p_{2,3} & 0 \end{pmatrix}.$$

Sigui $p_{0,1} \neq 0$ i siguin \mathbf{a} i \mathbf{b} punts de \mathbb{P}_3 amb vectors coordenats les files de la matriu de dalt, definits com $\mathbf{a} = [0, p_{0,1}, p_{0,2}, p_{0,3}]$ i $\mathbf{b} = [-p_{0,1}, 0, p_{1,2}, p_{1,3}]$.

Es pot veure que $\mathbf{a} \neq \mathbf{b}$. Un càlcul directe les dóna com a coordenades de Plücker de la recta, l , que passa per \mathbf{a} i per \mathbf{b} ,

$$\mathbf{p}(l) = [p_{0,1}^2, p_{0,1}p_{0,2}, p_{0,1}p_{1,2}, p_{0,2}p_{1,3} - p_{0,3}p_{1,2} = p_{0,1}p_{2,3}],$$

que són les coordenades multiplicades per $p_{0,1}$, i per tant $\mathbf{p}(l) = p$.

Per a provar la injectivitat, es considera, com a dalt, que l és la recta de \mathbb{P}_3 generada per punts diferents $\mathbf{a} = [a_0, a_1, a_2, a_3]$ i $\mathbf{b} = [b_0, b_1, b_2, b_3]$. Aleshores un punt, $\mathbf{x} = [x_0, x_1, x_2, x_3]$, pertany a l si i només si:

$$rk \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} < 3.$$

I això vol dir que tots els menors d'ordre tres de la matriu s'anul·len. És a dir que passa que:

$$\begin{aligned}
p_{1,2}x_0 - p_{0,2}x_1 + p_{0,1}x_2 &= 0 \\
p_{1,3}x_0 - p_{0,3}x_1 + p_{0,1}x_3 &= 0 \\
p_{2,3}x_0 - p_{0,3}x_2 + p_{0,2}x_3 &= 0 \\
p_{2,3}x_1 - p_{1,3}x_2 + p_{1,2}x_3 &= 0.
\end{aligned}$$

Els punts de l seran les solucions del sistema d'equacions anterior i, aquestes, estan determinades per les coordenades de Plücker de l . Llavors l està determinada per les seves coordenades de Plücker, i aleshores l'aplicació de Plücker és injectiva, ja que si dues rectes tinguessin les mateixes coordenades de Plücker, el sistema tindria els mateixos coeficients i per les tant mateixes solucions i els punts de la recta serien els mateixos i finalment les rectes serien la mateixa. \square

Observació 3.1.3. Quedaria veure que la Grasmanniana no es veu afectada per la referència que es trii. Si es pren una recta l , s'ha vist que les seves coordenades de Plücker prenent els seus punts en dues referències diferents, Δ i Δ' estan relacionades per una matriu $\bar{\mathbf{S}}$ que s'obté a partir de la matriu \mathbf{S} de canvi de referència entre Δ i Δ' . Per altra banda, l'equació (3.2) es pot expressar matricialment mitjançant la matriu $\mathbf{M}_{\mathbb{G}}$ (que s'explicita més endavant) com $\mathbf{M}_{\mathbb{G}}\mathbf{p}_{\Delta}(l) = 0$. Així doncs, per demostrar que és independent de la referència només caldrà comprovar que $\mathbf{M}_{\mathbb{G}}\mathbf{p}_{\Delta'}(l) = 0$. I, en efecte, $\mathbf{M}_{\mathbb{G}}\mathbf{p}_{\Delta'}(l) = \mathbf{M}_{\mathbb{G}}\bar{\mathbf{S}}\mathbf{p}_{\Delta}(l) = \bar{\mathbf{S}}'\mathbf{M}_{\mathbb{G}}\mathbf{p}_{\Delta}(l) = 0$ A on $\bar{\mathbf{S}}'$ és el conmutador del producte $\mathbf{M}_{\mathbb{G}}\bar{\mathbf{S}}$, és a dir que $\mathbf{M}_{\mathbb{G}}\bar{\mathbf{S}} = \bar{\mathbf{S}}'\mathbf{M}_{\mathbb{G}}$.

Una propietat important de les plataformes de Stewart-Gough, vista a [9] és que les files de \mathbf{J} (definició 2.1.6) són les coordenades de Plücker normalitzades (és a dir, prenent un representant qualsevol i dividint per la norma del vector de \mathbb{R}^3 format per les tres primeres coordenades) de les rectes dels actuadors. A partir d'ara sempre que es parli de *coordenades de Plücker normalitzades* s'estarà fent una referència a aquesta normalització.

Una manera més geomètrica de definir les coordenades de Plücker per a rectes afins, i que és equivalent a l'anterior és la següent: es considera una recta l , aleshores les tres primeres coordenades de Plücker vindran donades pel vector director de la recta, ℓ , i les tres últimes vindran donades pel producte $\bar{\ell} = p \times v$, amb p un punt qualsevol de la recta. Notar que el valor d'aquest producte no depèn del punt p triat de la recta. Per tant, les coordenades de Plücker de l seran el vector $(\ell, \bar{\ell})$. Mencionar que al realitzar la normalització esmentada anteriorment el que s'està fent és normalitzar pel mòdul del vector director de la recta. Aquesta definició és més intuïtiva, ja que les tres primeres coordenades donen la noció de desplaçament entre dos punts, i les tres últimes donen una idea de moment respecte l'origen de coordenades del sistema de referència que s'ha pres.

3.2 Quàdriques i correlacions

Com s'ha vist, les rectes de \mathbb{P}^3 formen una quàdrica a \mathbb{P}^5 . L'equació de la quàdrica ve donada per l'equació (3.2), que es pot expressar matricialment com el conjunt de punts, p de \mathbb{P}^5 tals que:

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{M}_{\mathbb{G}} \cdot \mathbf{p}^T = 0, \quad (3.4)$$

$$\text{amb } \mathbf{M}_G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Definició 3.2.1. Es diu que dos punts, p i q són *conjugats* respecte una quàdrica Q , donada, quan $\mathbf{p} \cdot \mathbf{M}_Q \cdot \mathbf{q}^T = 0$, amb \mathbf{M}_Q , la matriu de la forma bilineal simètrica que defineix la quàdrica Q .

A més a més, donat un punt p , el conjunt de tots els seus conjugats forma un hiperplà de \mathbb{P}^5 . Per veure-ho només cal, donat p , trobar els seus conjugats, que són els punts q tals que $\mathbf{q} \cdot \mathbf{M}_Q \cdot \mathbf{p}^T = 0$. El producte $\mathbf{M}_Q \cdot \mathbf{p}^T$ serà un altre punt, $\bar{\mathbf{p}}$ i per tant l'equació quedarà reduïda a $\mathbf{q} \cdot \bar{\mathbf{p}}^T = 0$, que és l'equació d'un hiperplà amb coeficients donats per $\bar{\mathbf{p}}$. Aquest hiperplà s'anomena *l'hiperplà polar de p relatiu a Q* .

Vist això, s'introdueix de manera natural la noció de correlació, que es farà servir més endavant:

Definició 3.2.2. Una *correlació*, g , d'un espai projectiu \mathbb{P}^n és una projectivitat de \mathbb{P}^n en el seu espai dual.

Les correlacions envien punts d'un espai a hiperplans en aquest mateix espai. Donada una correlació g amb una referència fixada a \mathbb{P}^n , si \mathbf{M} és la matriu de la correlació, aleshores g envia el punt amb coordenades $[y_0, \dots, y_n]$ a l'hiperplà d'equació $u_0x_0 + \dots + u_nx_n = 0$ amb:

$$\begin{pmatrix} u_0 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = \rho \mathbf{M} \begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},$$

per algun escalar ρ .

Definició 3.2.3. S'anomena *conjunt d'incidència* d'una correlació g , el conjunt de punts p tals que $p \in g(p)$.

Ara es definirà un conjunt particular de correlacions, que compleixen que el seu conjunt d'incidència és tot l'espai.

Definició 3.2.4. Les correlacions tals que el seu conjunt d'incidència és tot l'espai projectiu sobre el que estan definides, s'anomenen *null-systems*.

Els null-systems tenen una caracterització molt fàcil d'identificar, són aquelles correlacions que tenen una matriu antisimètrica.

Proposició 3.2.5. Una correlació és un null-system si i només si la seva matriu és antisimètrica.

Demostració. Donada una correlació g , de \mathbb{P}^n amb matriu $n \times n$ \mathbf{M}_g , $p \in g(p)$ si i només si $\mathbf{p} \cdot \mathbf{M}_g \cdot \mathbf{p}^T = 0$ i llavors g és un null-system si i només si, per a tot p , passa que $\mathbf{p} \cdot \mathbf{M}_g \cdot \mathbf{p}^T = 0$. Expandint el producte es té que $m_{i,i}^2 = 0$, ja que prenent $\mathbf{p} = [0, \dots, \overset{(i)}{1}, 0, \dots, 0]$, $\mathbf{p} \cdot \mathbf{M}_g \cdot \mathbf{p}^T = 0 \Rightarrow m_{i,i} = 0$ i $m_{i,j} = -m_{j,i}$ perquè, si $i < j$, considerant $\mathbf{p} = [0, \dots, \overset{(i)}{1}, 0, \dots, \overset{(j-i)}{1}, 0, \dots, 0]$ i imposant que $p \in g(p)$, es veu que $\mathbf{p} \cdot \mathbf{M}_g \cdot \mathbf{p}^T = m_{i,i}^2 + m_{j,j}^2 + m_{i,j} + m_{j,i} = 0 \Rightarrow m_{i,j} = m_{j,i}$, que és el que es volia veure. Recíprocament, si és antisimètrica, passa que $p \in g(p)$ perquè els termes quadràtics s'anul·len i els dobles productes s'anul·len dos a dos. \square

Definició 3.2.6. Es diu que una correlació, g satisfà *reciprocitat* quan es compleix que $p \in g(q) \Leftrightarrow q \in g(p)$ per p i q qualssevol.

Proposició 3.2.7. *Tots els null-systems satisfan reciprocitat.*

Demostració. Com que la matriu és antisimètrica $\mathbf{p} \cdot \mathbf{M}_g \cdot \mathbf{q}^T = \mathbf{q} \cdot \mathbf{M}_g \cdot \mathbf{p}^T$ i llavors $p \in g(q) \Leftrightarrow \mathbf{p} \cdot \mathbf{M}_g \cdot \mathbf{q}^T = 0 \Leftrightarrow \mathbf{q} \cdot \mathbf{M}_g \cdot \mathbf{p}^T = 0 \Leftrightarrow q \in g(p)$. \square

3.3 Complexos lineals

Com s'ha vist en la secció 2.3, les configuracions singulars es donen quan el determinant de la matriu \mathbf{P} és zero, o sigui, quan hi ha alguna relació de dependència lineal entre els vectors de Plücker associats als actuadors. Com que es tracta de sis vectors de Plücker, qualsevol conjunt linealment dependent estarà contingut en un conjunt de dimensió cinc. Aquests conjunts de dimensió cinc que caracteritzen les configuracions singulars s'anomenen complexos lineals.

Abans de res, s'ha afegit aquesta proposició amb la finalitat de donar més intuïció sobre la noció de conjugació respecte de la Grassmanniana.

Proposició 3.3.1. *Si l i r són dues rectes diferents de \mathbb{P}^3 , aleshores, les següents condicions són equivalents:*

1. l i r són coplanàries.
2. $\mathbf{p}(l)$ i $\mathbf{p}(r)$ són conjugats respecte \mathbb{G} .
3. La recta de \mathbb{P}^5 generada pels punts $\mathbf{p}(l)$ i $\mathbf{p}(r)$ està continguda a \mathbb{G} .

Demostració. $1 \Leftrightarrow 2$: Siguin $\mathbf{a} = [a_0, a_1, a_2, a_3]$ i $\mathbf{b} = [b_0, b_1, b_2, b_3]$ dos punts que generen l , amb $p_{i,j}$ les seves components de Plücker i $\mathbf{c} = [c_0, c_1, c_2, c_3]$ i $\mathbf{d} = [d_0, d_1, d_2, d_3]$, dos punts que generen r , amb $q_{i,j}$ les seves components de Plücker. Si l i r són coplanàries, aleshores el determinant resultant de considerar els quatre punts com a files, s'anul·la. És a dir:

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \\ d_0 & d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix} = 0.$$

En desenvolupar aquest determinant a partir de les dues primeres files, l'equació de dalt porta a: $p_{0,1}q_{2,3} - p_{0,2}q_{1,3} + p_{0,3}q_{1,2} + p_{1,2}q_{0,3} - p_{1,3}q_{0,2} + p_{2,3}q_{0,1} = 0$. Ara, aplicant la definició de conjugat segons la quàdrica \mathbb{G} es veu que aquesta condició vol dir exactament que p i q són conjugats respecte \mathbb{G} .

$2 \Leftrightarrow 3$: Siguin p i q dos punts de \mathbb{P}^5 , aleshores, els punts x de la recta generada per p i q són punts de la forma $x = a \cdot \mathbf{p} + b \cdot \mathbf{q}$. Si p i q , a més a més, són de \mathbb{G} , llavors passa que $\mathbf{x} \cdot \mathbf{M}_{\mathbb{G}} \cdot \mathbf{x}^T = 0$ si i nomès si p i q són conjugats. Ja que x és de \mathbb{G} si i nomès si $\mathbf{x} \cdot \mathbf{M}_{\mathbb{Q}} \cdot \mathbf{x}^T = 0$, però p i q són de \mathbb{G} i per tant, en aquest producte matricial, els productes $\mathbf{p} \cdot \mathbf{M}_{\mathbb{Q}} \cdot \mathbf{p}^T$ i $\mathbf{q} \cdot \mathbf{M}_{\mathbb{Q}} \cdot \mathbf{q}^T$ s'anul·len. I llavors $\mathbf{x} \cdot \mathbf{M}_{\mathbb{Q}} \cdot \mathbf{x}^T = 0$ si i nomès si els productes creuats s'anul·len, que és equivalent a dir que p i q són conjugats. I és el que es volia veure. \square

Definició 3.3.2. Donat un hiperplà, H , de \mathbb{P}^5 , el conjunt F_H de totes les rectes de \mathbb{P}^3 tals que la seva imatge per l'aplicació de Plücker pertany a H s'anomena *complex lineal*. És a dir $F_H = \mathbf{p}^{-1}(H)$.

Els punts dels complexos lineals satisfan l'equació de l'hiperplà i són rectes de \mathbb{P}^3 , per tant satisfaran l'equació:

$$\sum_{0 \leq i < j \leq 3} A_{i,j} p_{i,j} = 0. \quad (3.5)$$

On els coeficients $A_{i,j}$ són els de l'equació de l'hiperplà, i $p_{i,j}$ són les components de les coordenades de Plücker d'alguna recta de \mathbb{P}^3 . L'exemple més fàcil de complexos lineals s'obté fixant una recta l de \mathbb{P}^3 i prenent el conjunt de les rectes de \mathbb{P}^3 que s'intersequen amb l . Com que dues rectes es tallen si i nomès si les seves imatges per l'aplicació de Plücker són conjugades respecte \mathbb{G} , les representacions de les rectes que intersequen l són els punts de la secció de \mathbb{G} pel seu hiperplà tangent a $\mathbf{p}(l)$. Aquests complexos lineals s'anomenen *especials*. La resta de complexos lineals s'anomenen *no-especials*.

Sigui l és una recta i g un null-system (definició 3.2.4) de \mathbb{P}^3 . Les imatges $g(p)$, amb $p \in l$ formen un feix de plans \bar{l}^* . El seu nucli, \bar{l} , és una recta que s'anomena *recta polar*. Per ser \bar{l} una recta, passa que $\bar{l} = g(p_1) \cap g(p_2)$, per dos punts p_1 i p_2 que generen l , qualssevol. Això vol dir que si q_1 i q_2 generen \bar{l} , aleshores $q_1, q_2 \in g(p_i)$, $i = 1, 2$, i, per reciprocitat, $p_1, p_2 \in g(q_i)$, $i = 1, 2$. És a dir que la polar de \bar{l} és l . Les rectes que són iguals a la seva polar s'anomenen auto-polars. I pel que s'acaba de veure, una recta l , generada per p_1 i p_2 és autopolar respecte g si i nomès si:

$$p_1 \in g(p_1), p_1 \in g(p_2), p_2 \in g(p_1), p_2 \in g(p_2).$$

Com que g és un null-system, la primera i la última condició se satisfan sempre i, per reciprocitat, la segona i la tercera són equivalents, per tant nomès cal que $p_1 \in g(p_2)$.

El teorema que ve a continuació és el teorema clau en el que es basa el desenvolupament de la solució, ja que permet una caracterització completa dels complexos lineals, que són els

conjunts que contenen les configuracions singulars. És per això que també s'inclourà la seva demostració. Per a provar-lo es farà servir el lema següent (capítol, 6 de [3]):

Lema 3.3.3. *Si una varietat lineal, L passa per un punt p d'una quàdrica Q i no és tangent a Q en p , aleshores L és varietat lineal més petita que conté tots els punts de $Q \cap L$.*

Teorema 3.3.4. *Hi ha una correspondència bijectiva entre complexos lineals no-especials i null-systems de \mathbb{P}^3 , de manera que les rectes que formen un complex lineal no especial són aquelles que són auto-polars respecte al corresponent null-system.*

Demostració. Sigui $|\mathbb{G}| = \{x \in \mathbb{P}^5 | x \in \mathbb{G}\}$ i $\mathbf{q} = [q_{i,j}]_{0 \leq i \leq j \leq 3} \in \mathbb{P}^5 - |\mathbb{G}|$ i sigui F_q el complex lineal determinat per l'hiperplà polar H_q de q relatiu a \mathbb{G} , que és:

$$F_q = \mathbf{p}^{-1}(|\mathbb{G} \cap H_q|).$$

Per ser \mathbb{G} no degenerada i contenir plans, H_q conté un punt simple q' de \mathbb{G} . No només això, sinó que H_q no és tangent a \mathbb{G} en q' , ja que $q \notin \mathbb{G}$, i per tant $q \neq q'$, pel lema 3.3.3 $\mathbb{G} \cap H_q = \mathbf{p}(F_q)$ determina H_q . L'hiperplà H_q determina a la seva vegada el seu pol, q . Finalment, F_q determina $\mathbf{p}(F_q)$, per ser \mathbf{p} una bijecció, aleshores l'aplicació $g(q) = F_q$ és una bijecció entre $\mathbb{P}^5 - |\mathbb{G}|$ i el conjunt de complexos lineals no especials de \mathbb{P}^3 . Per altra banda, es considera la matriu:

$$\mathbf{N}_q = \begin{pmatrix} 0 & q_{2,3} & -q_{1,3} & q_{1,2} \\ -q_{2,3} & 0 & q_{0,3} & -q_{0,2} \\ q_{1,3} & -q_{0,3} & 0 & q_{0,1} \\ -q_{1,2} & q_{0,2} & -q_{0,1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculant es veu que:

$$\det \mathbf{N}_q = (q_{0,1}q_{2,3} - q_{0,2}q_{1,3} + q_{0,3}q_{1,2})^2,$$

i, per tant, com que q no és de \mathbb{G} , la matriu \mathbf{N}_q és no singular, ja que si no les components de q complirien que són les coordenades de Plücker d'una recta. Donat que, a més a més, \mathbf{N}_q és anti-simètrica, la correlació definida per \mathbf{N}_q és un null-system, g_q de \mathbb{P}^3 , que està determinat per q . Per tant, $q \rightarrow g_q$ defineix una bijecció entre $\mathbb{P}^5 - |\mathbb{G}|$ i null systems de \mathbb{P}^3 . Només queda veure que les rectes del corresponent complex de lineal no especial són autopolars respecte el null-system.

Siguin $\mathbf{a} = [a_0, a_1, a_2, a_3]$ i $\mathbf{b} = [b_0, b_1, b_2, b_3]$ dos punts diferents de \mathbb{P}^3 , i $p_{i,j}$, les coordenades de Plücker de la recta, l , que generen. Com s'ha vist abans, l'única condició per a que l sigui autopolar respecte g_q és que $a \in g(b)$, és a dir que:

$$(a_0 \ a_1 \ a_2 \ a_3) \cdot \begin{pmatrix} 0 & q_{2,3} & -q_{1,3} & q_{1,2} \\ -q_{2,3} & 0 & q_{0,3} & -q_{0,2} \\ q_{1,3} & -q_{0,3} & 0 & q_{0,1} \\ -q_{1,2} & q_{0,2} & -q_{0,1} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = 0.$$

I és equivalent a:

$$p_{0,1}q_{2,3} - p_{0,2}q_{1,2} + p_{0,3}q_{1,2} + p_{1,2}q_{0,3} - p_{1,3}q_{0,2} + p_{2,3}q_{0,1} = 0,$$

que és la condició de que $\mathbf{p}(l)$ i q siguin conjugats respecte \mathbb{G} , és a dir que $l \in F_q$. Així doncs, els punts, q de $\mathbb{P}^5 - |\mathbb{G}|$ estan en bijecció amb els null-systems, g_q de \mathbb{P}^3 de manera que les rectes del complex lineal, que es corresponen amb els punts de la intersecció de l'hiperplà polar de q relatiu a \mathbb{G} amb la varietat \mathbb{G} , són autopolars respecte g_q . \square

3.4 Interpretació cinemàtica dels complexos lineals

En aquesta secció donarà una interpretació dels complexos lineals que lliga la seva geometria amb la cinemàtica d'un moviment en un espai euclidi $E^3 = (\mathbb{R}^3, \cdot)$ donada a [12].

Un moviment helicoidal (figura 3.1) d'eix A i raó p , triant com a A , l'eix z d'un sistema de coordenades cartesià, es parametritza com:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ pt \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{x}(0). \quad (3.6)$$

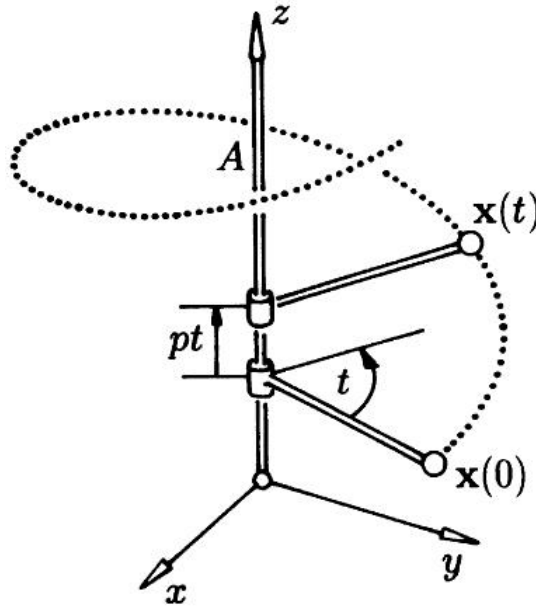


Figura 3.1: Moviment helicoidal d'eix A ($x = y = 0$) i raó p .

Pel que se segueix no es farà aquesta elecció particular d' A . Com es pot comprovar, el moviment és la composició d'una rotació amb una translació, de manera que la ratio entre les magnituds del desplaçament de la translació i de l'angle de la rotació ve donada per p . La velocitat d'un punt sotmès a aquest moviment és [2]:

$$\mathbf{v}(x) = \bar{\mathbf{c}} + \mathbf{c} \times \mathbf{x}, \quad (3.7)$$

on \times denota el producte vectorial clàssic i els vectors constants \mathbf{c} i $\bar{\mathbf{c}}$ estan definits a partir de A i p com se segueix: Si $[a_{0,1}, a_{0,2}, a_{0,3}, a_{1,2}, a_{1,3}, a_{2,3}]$ és un representant de les coordenades de Plücker de l'eix A . Es pren $\mathbf{a} = (a_{0,1}, a_{0,2}, a_{0,3})$ i $\bar{\mathbf{a}} = (a_{2,3}, -a_{1,3}, a_{1,2})$, tots dos entesos com a vectors de \mathbb{R}^3 . I aleshores \mathbf{c} i $\bar{\mathbf{c}}$, cadascun de \mathbb{R}^3 , compleixen que:

$$p = \frac{\mathbf{c} \cdot \bar{\mathbf{c}}}{\mathbf{c}^2}, (\mathbf{a}, \bar{\mathbf{a}}) = (\mathbf{c}, \bar{\mathbf{c}} - p\mathbf{c}). \quad (3.8)$$

Observació 3.4.1. Notar que aquesta definició de \mathbf{c} i $\bar{\mathbf{c}}$ està condicionada pel representant de les coordenades de Plücker de l'eix, A a \mathbb{P}^5 que es prengui. Si es té un moviment d'eix A i raó p , siguin $\bar{\mathbf{A}} = (\mathbf{a}, \bar{\mathbf{a}})$ trobats, com abans, a partir d'un representant, $\bar{\mathbf{A}}$, de les coordenades de Plücker de l'eix A amb vectors associats $\mathbf{c} = \mathbf{c}((\mathbf{a}, \bar{\mathbf{a}}), p)$ i $\bar{\mathbf{c}} = \bar{\mathbf{c}}((\mathbf{a}, \bar{\mathbf{a}}), p)$. Si es pren $(\mathbf{b}, \bar{\mathbf{b}})$, calculat a partir d'un altre representant diferent de A , $\bar{\mathbf{B}}$, de manera que $\bar{\mathbf{B}} = \rho\bar{\mathbf{A}}$, aleshores, com que $(\mathbf{b}, \bar{\mathbf{b}}) = \rho(\mathbf{a}, \bar{\mathbf{a}})$, els vectors associats, $\mathbf{c}((\mathbf{b}, \bar{\mathbf{b}}), p)$ i $\bar{\mathbf{c}}((\mathbf{b}, \bar{\mathbf{b}}), p)$, compleixen que $\mathbf{c}((\mathbf{b}, \bar{\mathbf{b}}), p) = \rho\mathbf{c}((\mathbf{a}, \bar{\mathbf{a}}), p)$ i $\bar{\mathbf{c}}((\mathbf{b}, \bar{\mathbf{b}}), p) = \rho\bar{\mathbf{c}}((\mathbf{a}, \bar{\mathbf{a}}), p)$. De cara a la interpretació que es farà posteriorment, això no importa però sí que passa que aleshores la velocitat en un punt segons l'equació (3.7) no està del tot ben definida, ja que la norma del vector velocitat dependrà del representant que es prengui de l'eix, i seria $\mathbf{v}_{\bar{\mathbf{B}}}(x) = \rho\mathbf{v}_{\bar{\mathbf{A}}}(x)$. Això comportaria un canvi de paràmetre del moviment helicoidal de l'equació (3.6), amb el nou paràmetre $t' = \rho t$.

Les rectes, l , que passen per punts x i que a més a més són normals a $v(x)$, la trajectòria de x , s'anomenen *camins normals* (figura 3.2). Considerant les coordenades de Plücker d'una d'aquestes rectes, $\mathbf{p}(l) = [l_{0,1}, l_{0,2}, l_{0,3}, l_{1,2}, l_{1,3}, l_{2,3}]$, i prenent, com abans, $\mathbf{r} = (l_{0,1}, l_{0,2}, l_{0,3})$ i $\bar{\mathbf{r}} = (l_{2,3}, -l_{1,3}, l_{1,2})$, vectors de \mathbb{R}^3 ; dits vectors es poden interpretar segons el que s'ha mencionat al capítol 3: si es considera la immersió afí $\mathbb{A}^3 \subset \mathbb{P}^3$ que envia (x, y, z) a $(1, x, y, z) = (x_0, x_1, x_2, x_3)$ i la recta l està generada per dos punts afins, $\mathbf{a} = (1, a_1, a_2, a_3)$ i $\mathbf{b} = (1, b_1, b_2, b_3)$, llavors $\mathbf{r} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)$ és un vector director de l i $\bar{\mathbf{r}} = (\mathbf{x} \times \mathbf{r})$ per qualsevol punt x de la recta l . Aleshores la condició que l sigui normal a \mathbf{v} en x , $\mathbf{v} = \mathbf{v}(x)$, es tradueix com:

$$0 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{r}, \quad (3.9)$$

i, treballant una mica a \mathbb{R}^3 :

$$0 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{r} = \bar{\mathbf{c}} \cdot \mathbf{r} + (\mathbf{c} \times \mathbf{x}) \cdot \mathbf{r} = \bar{\mathbf{c}} \cdot \mathbf{r} + \mathbf{c} \cdot (\mathbf{x} \times \mathbf{r}).$$

Finalment, per ser x un punt de l , es té que $(\mathbf{x} \times \mathbf{r}) = \bar{\mathbf{r}}$, i per tant s'arriba a que:

$$0 = \bar{\mathbf{c}} \cdot \mathbf{r} + \mathbf{c} \cdot \bar{\mathbf{r}}. \quad (3.10)$$

Reordenant adequadament els termes, s'obté l'expressió de la forma:

$$\sum_{0 \leq i < j \leq 3} A_{i,j} l_{i,j} = 0, \quad (3.11)$$

que no és més que la condició de que $\mathbf{p}(l)$ sigui de l'hiperplà de \mathbb{P}^5 amb coeficients $A_{i,j}$ (trobat directament a partir de \mathbf{c} i $\bar{\mathbf{c}}$) i, per tant, sigui d'un complex lineal. Això vol dir que els camins normals d'un moviment helicoidal, es corresponen amb un hiperplà de \mathbb{P}^5 intersecat

amb \mathbb{G} . I el recíproc també és cert, els punts d'un hiperplà de \mathbb{P}^5 intersecat amb \mathbb{G} , són els punts de \mathbb{G} que compleixen una equació com (3.11), i prenent $\mathbf{c} = (A_{2,3}, -A_{1,3}, A_{1,2})$ i $\bar{\mathbf{c}} = (A_{0,1}, A_{0,2}, A_{0,3})$, llavors es tindrà que els punts de \mathbb{G} , que són rectes de \mathbb{P}^3 , que compleixin l'equació de l'hiperplà, compliran que $\bar{\mathbf{c}} \cdot \mathbf{r} + \mathbf{c} \cdot \bar{\mathbf{r}} = 0$ i seran els camins normals de rectes d'un moviment helicoidal d'eix A , que té com a coordenades de Plücker $[a_{0,1}, a_{0,2}, a_{0,3}, a_{1,2}, a_{1,3}, a_{2,3}]$ calculades a partir de (3.8), com:

$$\begin{aligned} a_{0,1} &= A_{2,3} \\ a_{0,2} &= -A_{1,3} \\ a_{0,3} &= A_{1,2} \\ a_{1,2} &= A_{0,3} - pA_{1,2} \\ a_{1,3} &= -(A_{0,2} + pA_{1,3}) \\ a_{2,3} &= A_{0,1} - pA_{2,3}. \end{aligned}$$

Quan el moviment sigui una rotació pura sense translació, serà el cas d'un complex lineal especial. Relacionant-ho amb la demostració del teorema 3.3.4, de la secció anterior, es considera la correlació induïda per \mathbb{G} i de matriu $\mathbf{M}_{\mathbb{G}}$, $g_{\mathbb{G}}$, que envia un punt, q a l'hiperplà generat per tots els seus conjugats respecte \mathbb{G} , i que té per coeficients $\mathbf{M}_{\mathbb{G}} \cdot \mathbf{q}$; i, per ser \mathbb{G} no degenerada, això dóna lloc a una bijecció entre punts de \mathbb{P}^5 i hiperplans de \mathbb{P}^5 . En particular, l'hiperplà de coeficients $A_{i,j}$, que es poden posar com a components d'un vector de \mathbb{P}^5 , A , serà l'hiperplà polar respecte \mathbb{G} d'algun punt, q de \mathbb{P}^5 . Les components d'aquest punt q compliran, per tant, que $A = \mathbf{M}_{\mathbb{G}} \cdot \mathbf{q}$ i, si $\mathbf{q} = (q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6)$ és un representant de q , es tindrà:

$$\begin{aligned} A_{0,1} &= \frac{1}{2}q_6 \\ A_{0,2} &= \frac{-1}{2}q_5 \\ A_{0,3} &= \frac{1}{2}q_4 \\ A_{1,2} &= \frac{1}{2}q_3 \\ A_{1,3} &= \frac{-1}{2}q_2 \\ A_{2,3} &= \frac{1}{2}q_1, \end{aligned}$$

i aleshores la ratio entre rotació i translació del moviment helicoidal associat al complex lineal de q serà,

$$p = \frac{A_{2,3}A_{0,1} - A_{1,3}A_{0,2} + A_{1,2}A_{0,3}}{A_{2,3}^2 + A_{1,3}^2 + A_{1,2}^2} = \frac{q_1q_6 - q_2q_5 + q_3q_4}{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2},$$

i l'eix, que té com a representant de les seves coordenades de Plücker a $(a_{0,1}, a_{0,2}, a_{0,3}, a_{1,2}, a_{1,3}, a_{2,3})$, es calcularà a partir de l'expressió anterior com:

$$\begin{aligned} a_{0,1} &= \frac{1}{2}q_1 \\ a_{0,2} &= \frac{1}{2}q_2 \\ a_{0,3} &= \frac{1}{2}q_3 \\ a_{1,2} &= \frac{1}{2}(q_4 - pq_3) \\ a_{1,3} &= \frac{1}{2}(q_5 + pq_2) \\ a_{2,3} &= \frac{1}{2}(q_6 - pq_1). \end{aligned}$$

Observació 3.4.2. En aquesta interpretació que es fa, únicament s'està parlant de les solucions de l'equació (3.10) i, per ser lineal, les solucions no es veuen afectades pel múltiple de \mathbf{c} i $\bar{\mathbf{c}}$ que es prengui, és a dir, que les solucions de l'equació (3.10) sempre seran les mateixes, independentment del representant de l'eix A que es prengui.

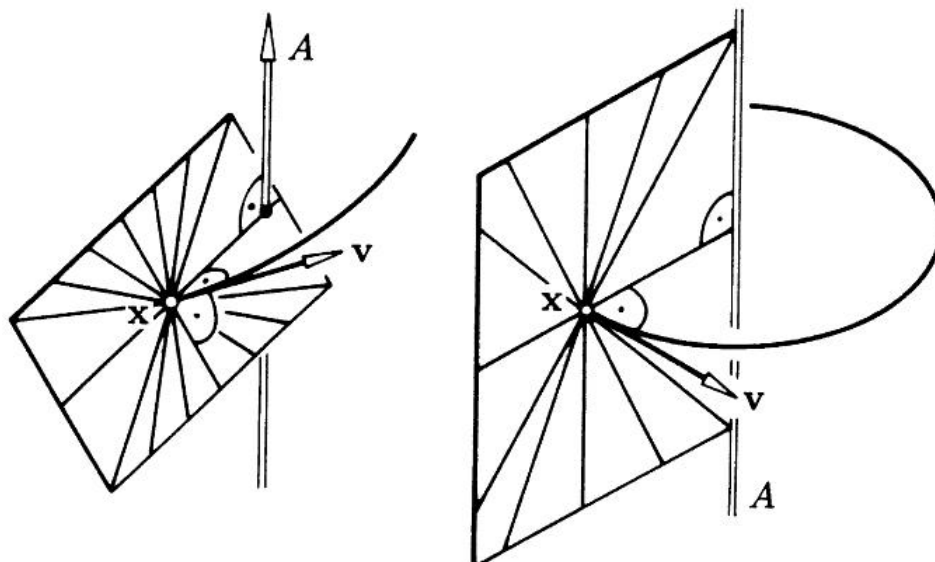


Figura 3.2: Pla dels camins normals en x al moviment helicoïdal d'eix A (rectes que passen per x i són perpendiculars a $v(x)$).

3.5 Seccions de la Grassmanniana

Les configuracions singulars dels manipuladors admeten una classificació geomètrica que depèn, en primera instància de la dimensió de les subvarietats que generen les rectes associades als actuadors que s'intersequen amb la Grassmanniana (rang) i de com es faci dita intersecció (tangència) i, en segon lloc, de quina és la posició relativa de les rectes que generen aquestes subvarietats. A la figura 3.3, que es veu a continuació, s'observa una subvarietat de rang 2 (B) i dues de rang 3 (C i D).

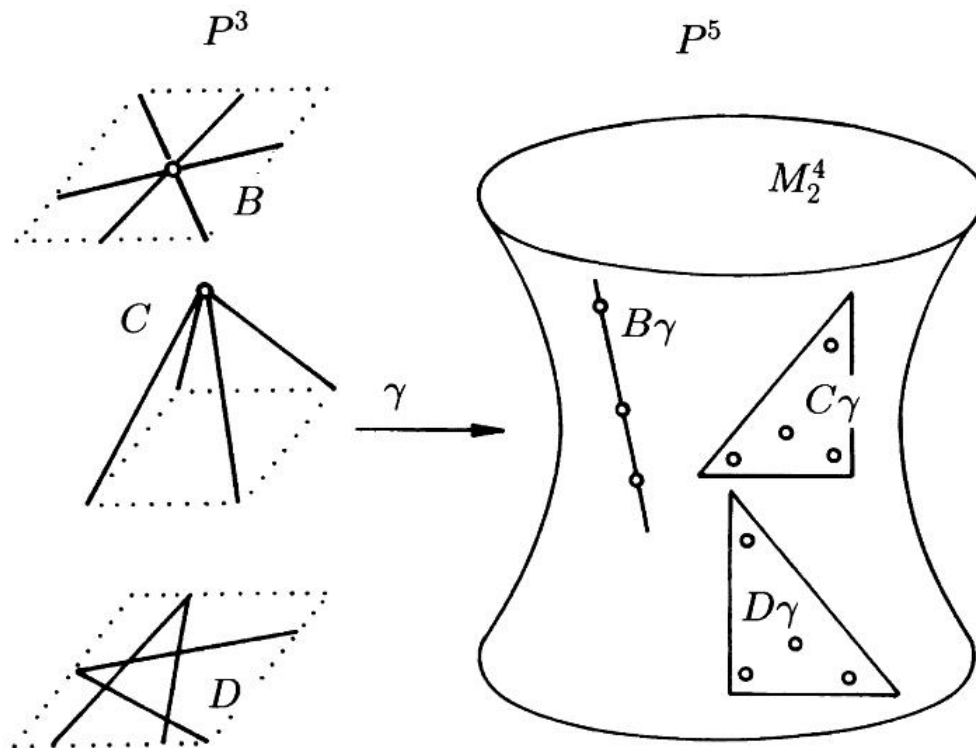


Figura 3.3: Les diferents varietats que estan completament incloses dins de la Grassmanniana i les seves antiimatges per l'immersió de Plücker. On (B) és una recta de \mathbb{P}^5 completament inclosa a \mathbb{G} , i (C) i (D) són plans completament continguts però de diferents tipus.

Aquesta classificació es mostra a continuació, s'han inclòs els detalls que es consideren necessaris per a la comprensió i per al posterior ús que se'n farà i, tot i que s'introdueixen des d'un punt de vista deductiu, aquestes deduccions no estan del tot completes. Les eines necessàries per a completar aquestes deduccions es donen a l'annex A.

3.5.1 Rang 1: El punt

Les subvarietats de dimensió 0 amb intersecció no nul·la amb \mathbb{G} són els punts reals de \mathbb{G} a \mathbb{P}^5 . Aquests, per definició, estan en correspondència amb les rectes reals de \mathbb{P}^3 . Per tant, si dos o més actuadors es troben sobre la mateixa recta, el manipulador estarà en una configuració singular de rang 1.

3.5.2 Rang 2: Seccions amb rectes

Les rectes de \mathbb{P}^5 que intersequen \mathbb{G} seran les subvarietats de dimensió 1 que interessa trobar. Aquesta recta pot estar inclosa en \mathbb{G} , o no: en el primer cas donarà lloc a configuracions singulars de rang 2; i en el segon cas no, ja que per ser \mathbb{G} una quàdrica (graú 2) les rectes no contigudes en ella la tallen en dos punts com a molt. Les configuracions singulars pròpiament de rang 2 seran aquelles en les que tres o més braços del manipulador siguin coplanaris i, com a rectes de \mathbb{P}^3 , tinguin un punt en comú, és a dir, quan tres o més braços d'un manipulador pertanyin al mateix feix de rectes; com es mostra a la figura 3.4. (Es tracta directament del cas de la proposició A.0.1 de l'annex A).

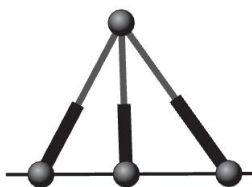


Figura 3.4: Tres actuadors coplanaris i coincidents en un punt, es correspon amb una configuració singular de rang 2.

3.5.3 Rang 3: Seccions planes

Les configuracions singulars de rang 3 són aquelles en les que es veuen involucrats, com a mínim, quatre actuadors. Analitzant-ho des de \mathbb{P}^3 , donades les coordenades de Plücker de tres rectes independents de \mathbb{P}^3 , F_1 , F_2 i F_3 , es busca el conjunt de punts $T \in \mathbb{G}$ de manera que $\mathbf{T} = k_1\mathbf{F}_1 + k_2\mathbf{F}_2 + k_3\mathbf{F}_3$. Definint V com $V = H_{F_1} \cap H_{F_2} \cap H_{F_3}$, amb H_{F_i} l'hiperplà polar de F_i respecte \mathbb{G} , Es diferenciaren diferents casos, segons si $V \cap \mathbb{G}$ és degenerada o no, que depèn de la posició relativa de les rectes.

Tipus 3 A: Tres rectes que es creuen dos a dos

Si F_1 , F_2 , i F_3 es creuen dos a dos, $V \cap \mathbb{G}$ és no degenerada. Es correspon amb el cas en què el pla amb el que es fa la intersecció no està totalment contingut a \mathbb{G} , de manera que la varietat resultant serà el regulus. Per aquest cas, quan les rectes associades a tres actuadors es creuen dos a dos i la recta d'un quart actuator té un punt en comú amb cadascuna d'elles

s'assoleix una configuració singular (figura 3.5). (Es tracta de la proposició A.0.3 de l'annex A)

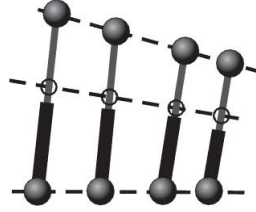


Figura 3.5: Quatre actuadors intersecant a tres mateixes rectes simultàniament, es correspon amb una configuració singular de rang 3 tipus 3A (regulus).

Els casos que vénen a continuació es corresponen amb la situació en que $V \cap \mathbb{G}$ és degenerada.

Tipus 3 B: Dos feixos de rectes

En cas en què dues de les rectes, F_1 i F_2 es tallin en p la subvarietat degenera en una de diferent. La intersecció amb \mathbb{G} seran dues rectes de \mathbb{P}^5 . Siguin el pla, P_1 generat per les rectes que s'intersequen, i el pla, P_2 generat per la recta que queda, F_3 , i el punt, p . Si els plans són diferents, llavors s'intersequen en una recta l que passa per p i interseca F_3 en un punt q . I la subvarietat serà el feix de rectes que passa per p a P_1 i el feix de rectes que passa per q a P_2 . És a dir que la intersecció a \mathbb{P}^5 seran les rectes generades per $(p(F_1), p(F_2))$ i la imatge per l'aplicació de Plücker de dues rectes diferents de P_2 que passin per q . La configuració singular s'assolirà, doncs, quan la recta d'algun dels actuadors restants pertanyi a algun dels dos feixos descrits.

Observació 3.5.1. Aquest cas és el cas més degenerat, ja que, com es pot veure, la intersecció no és pròpiament un pla, sinó dues rectes de \mathbb{G} .

Tipus 3 C: Tres rectes coplanàries

Si les tres rectes són coplanàries però no estan en el mateix feix, el conjunt dels punts T serà un pla contingut a \mathbb{G} i la subvarietat esdevindrà el conjunt de totes les rectes contingudes en aquest pla. La singularitat es donarà quan una quarta recta d'un actuator sigui coplanària a tres que es troben en aquest pla. (Es tracta del cas (1) de la proposició A.0.2 de l'annex A).

Tipus 3 D: Totes les rectes per un punt

Finalment, si les tres rectes s'intersequen al mateix punt i no són coplanàries l'antimatge dels T serà el conjunt de totes les rectes que passen pel punt. Per tant, quan quatre rectes de quatre actuadors s'intersequin en un punt, es perdre la rigidesa (figura 3.6). (Es tracta del cas (2) de la proposició A.0.2 de l'annex A).

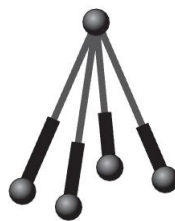


Figura 3.6: Quatre actuadors coincidents en un mateix punt, es correspon amb una configuració singular de rang 3, tipus 3D (regulus degenerat).

3.5.4 Rang 4: Seccions amb subvarietats 3-dimensionals

Es busquen ara conjunts generats per 4 rectes linealment independents en termes de vectors de Plücker. És a dir, el conjunt $\mathcal{T}_4 : F = k_1 F_1 + k_2 F_2 + k_3 F_3 + k_4 F_4$. El desenvolupament que fa McCarthy a [8] arriba a una equació quadràtica a coeficients reals i, en base la naturalesa de les seves arrels, discuteix aquests casos:

- Tipus 4A (dues arrels imaginàries): El conjunt generat per quatre rectes que es creuen dos a dos.
- Tipus 4B (dues arrels reals i diferents): Totes les rectes concurrents a dues rectes creuades.
- Tipus 4C (arrel doble): Una família uniparamètrica de feixos de rectes que tenen una recta en comú amb una varietat.
- Tipus 4D (es tracta del cas 4B degenerat): Totes les rectes en un pla o bé, totes les rectes de \mathbb{P}^3 que passen per un punt.

3.5.5 Rang 5: Complexos lineals

Com s'ha vist, les subvarietats de dimensió 5 reben el nom de complexos lineals i són l'antimatge dels hiperplans H de \mathbb{P}^5 per l'aplicació de Plücker. Hi haurà dos casos, segons si l'hiperplà H de \mathbb{P}^5 és tangent a \mathbb{G} , o no.

Complex lineal no especial

És el cas general en que l'hiperplà H no és tangent \mathbb{G} i el complex lineal s'anomena no-especial. La configuració està generada per cinc rectes linealment independents (que es creuen) que no es recolzen en cap recta. A partir del teorema 3.3.4 s'obté una caracterització geomètrica del complex lineal general: totes les rectes que hi pertanyen són autopolars respecte el null-system, g associat al complex. És a dir que, a través de qualsevol punt de l'espai, x , existeix un i només un feix de rectes planes (contingudes en el pla $g(x)$) tal que totes les rectes que pertanyen al feix, pertanyen també al complex. En altres paraules, totes les rectes d'un complex lineal que són coplanàries s'intersequen en un punt, x . I relacionant-ho amb la

interpretació de la secció 3.4, associat al complex lineal hi ha un eix A i una raó, ρ , que determinen un moviment helicoidal de l'espai $E^3 \subset \mathbb{P}^3$ del manipulador. Aleshores les rectes pertanyents al feix que s'ha mencionat anteriorment, són les rectes dels camins normals a la trajectòria de x pel moviment helicoidal associat al complex.

Complex lineal especial

És el cas en què H és tangent a \mathbb{G} : els coeficients de l'hiperplà són de la forma $\mathbf{M}_{\mathbb{G}} \cdot \mathbf{p}(l)$, amb $\mathbf{p}(l)$, les coordenades de Plücker d'una recta de \mathbb{P}^3 , l . De fet, H és l'hiperplà tangent a \mathbb{G} en $\mathbf{p}(l)$. I llavors es buscarà l'antimatge per l'aplicació de Plücker de tots els punts de \mathbb{G} conjugats a un punt $\mathbf{p}(l)$, donat. És a dir, es prenen tots els punts a , de \mathbb{G} tals que $\mathbf{p}(l)$ i a són conjugats. Per ser a de \mathbb{G} , passa que $a = \mathbf{p}(r)$ i, per la proposició 3.3.1, que siguin conjugats és equivalent a que r i l es tallin i així s'estan prenent totes les rectes, r que intersequen a l . Segons la interpretació de la secció 3.4 es correspondria amb un moviment helicoidal de rotació pura, on els camins normals són els plans que contenen l'eix de rotació. Quan les sis rectes corresponents als sis actuadors tallin a una mateixa recta, s'assolirà la configuració singular de rang 5 (figura 3.7).

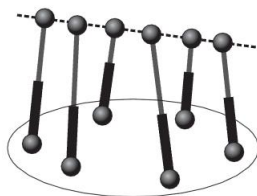


Figura 3.7: Sis rectes tallant a una recta, corresponent a una configuració de rang 5 (complex lineal especial).

Capítol 4

Proposta de solució

Ara que s'ha vist quin és el lloc geomètric dels actuadors que dona lloc a les diferents configuracions singulars, té sentit estudiar com de prop o de lluny s'està d'una configuració singular. Es desenvoluparan dues mesures vectorials que són propostes de solució al problema de l'estàtica, és a dir dos candidats a mesures de proximitat.

4.1 Angle amb el pla singular

En aquesta secció i la següent, la secció 4.2, s'introduiran dues mesures noves de proximitat a una configuració singular. Com es demostra, compleixen la condició indispensable, que és que les configuracions singulars queden caracteritzades per donar mesura 0. Aquestes dues mesures, a diferència d'altres índexos, tenen l'avantatge d'estar definides en l'espai ambient E^3 del manipulador, on hi ha una noció clara de mètrica i, per tant, de proximitat.

Definició 4.1.1. Donat un manipulador en una configuració fixada amb sis actuadors, $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_6$, el *pla singular* de l'actuador \mathcal{A}_i , és el lloc geomètric dels anclatges de mòbils de l'actuador \mathcal{A}_i que fan que la recta de \mathcal{A}_i , l_i , sigui del complex lineal generat per les rectes associades a la resta d'actuadors, \mathcal{C}_i .

Aquest pla es pot construir a partir de les eines que es donen a la demostració del teorema 3.3.4. Es prenen els cinc actuadors restants, de rectes l_k , $1 \leq k \leq 6$, $k \neq i$, i es pren un representant de les seves coordenades de Plücker $\mathbf{p}(l_k)$. A continuació es troba el punt q_i , que és conjugat amb tots els $\mathbf{p}(l_k)$; si el manipulador no es troba en una configuració singular de rang menor estricte que 5, el punt q_i existeix i és únic. El producte $\mathbf{M}_{\mathbb{G}} \cdot \mathbf{q}_i$, essent $\mathbf{M}_{\mathbb{G}}$ la matriu associada a la Grassmanniana, dona els coeficients de l'hiperplà de \mathbb{P}^5 que conté els punts $\mathbf{p}(l_k)$. La secció d'aquest hiperplà dona el complex lineal, \mathcal{C}_i , i quan la recta del i -èssim actuador, l_i , hi pertanyi, el manipulador es trobarà en una configuració singular (de rang 5). Amb la bijecció que es dona al teorema 3.3.4, es troba la matriu del null-system, g_i associat a aquest complex lineal, \mathbf{N}_{q_i} . Finalment, sigui a_i , l'anclatge fix de l'actuador \mathcal{A}_i . Com que les rectes pertanyents al complex lineal són les que són autopolars respecte g_i , la condició per a què una recta que passa per a_i sigui autopolar, serà que un altre punt de la recta, b compleixi que $\mathbf{b} \cdot \mathbf{N}_{q_i} \cdot \mathbf{a}_i^T = 0$ i aquesta és l'equació d'un pla que, per ser g_i un null-system, passa per

a_i i es correspon amb el lloc geomètric dels anclatges mòbils de l'actuador \mathcal{A}_i que fan que el manipulador es trobi en una configuració singular. En el cas particular que q siguin les coordenades de Plücker d'una recta, és a dir, que el complex lineal generat pels altres cinc actuadors sigui especial, el pla singular és el pla que conté l'anclatge fix i la recta sobre la que és construïx el complex (la recta, r , tal que totes les rectes del complex intersequen a r). Sempre es prendrà l'angle entre 0 rad i π rad.

Proposició 4.1.2. *Siguin $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_6$ els actuadors d'una plataforma de Stewart-Gough i sigui a_i l'anclatge fix d' \mathcal{A}_i . Aleshores, el pla singular de l'actuador \mathcal{A}_i és el mateix que el pla generat pel conjunt de camins normals per a_i al moviment helicoidal associat al complex lineal determinat per les rectes associades a la resta d'actuadors, \mathcal{C}_i .*

Demostració. Pel cas no especial, sigui, \mathcal{A}_i , l'actuador i -èssim, amb a_i el seu anclatge fix. Per la construcció de l'angle que s'ha fet, un punt b és del pla singular de \mathcal{A}_i si i només si la recta l_b , generada per a_i i b , és del complex lineal \mathcal{C}_i , generat per les rectes associades a la resta d'actuadors. Per a que una recta pertanyi al conjunt de camins normals en a_i , cal que passi per a_i i que sigui normal a la velocitat de a_i segons el moviment helicoidal associat a \mathcal{C}_i . Ara bé, la recta l_b passa per a_i i, que l_b sigui del complex vol dir que compleix l'equació del complex que, per l'equació (3.10) equival a que la recta l_b sigui normal a la velocitat en a_i . Recíprocament, si una recta pertany al conjunt de camins normals de a_i pel moviment helicoidal associat a \mathcal{C}_i , vol dir que passa per a_i i que compleix la condició de normalitat respecte la velocitat de a_i , que com s'ha vist a l'equació (3.10) és el mateix que complir l'equació del complex. Pel teorema 3.3.4, les rectes d'un complex lineal són aquelles que són autopolars respecte el null-system associat, i per tant un altre punt de la recta, b , compleix que $\mathbf{b} \cdot \mathbf{N}_q \cdot \mathbf{a}_i^T = 0$, amb \mathbf{N}_q , la matriu del null-system associat a \mathcal{C}_i . Finalment, això vol dir que la recta, generada per a_i i b , pertany al pla singular de \mathcal{A}_i . Pel cas especial, el pla singular d'un actuador \mathcal{A}_i és el pla que conté l'anclatge fix de \mathcal{A}_i , a_i i la recta r sobre la que es construïx el complex (l'eix del moviment helicoidal). Aquest pla i el pla de camins normals a la velocitat del punt a_i són el mateix. \square

Definició 4.1.3. Per a un manipulador en una configuració donada, \mathcal{K} , l'angle amb el pla singular de l'actuador \mathcal{A}_i , $\alpha_i(\mathcal{K})$, és l'angle que forma la recta associada a l'actuador \mathcal{A}_i , l_i , amb el pla singular de l'actuador \mathcal{A}_i . Té unitats de graus ($^\circ$) o radians (rads). La sextupla resultant de posar els sis valors de l'angle ordenats, es denotarà com $\alpha(\mathcal{K})$.

Cal veure que aquest angle està ben definit i que té sentit calcular-lo.

Proposició 4.1.4. *L'angle amb el pla singular està ben definit.*

Demostració. Sigui l_i la recta associada a \mathcal{A}_i , a_i el punt de l'anclatge fix i Π_i el pla singular de l'actuador \mathcal{A}_i . Per veure que està ben definit només cal comprovar que l_i i Π_i es tallen. De fet, es demostrarà que tots dos contenen a a_i . Clarament, a_i pertany a la recta l_i . Per veure que a_i pertany a Π_i , només cal fixar-se en com s'ha calculat aquest. El pla Π_i és la imatge per un null-system, g_i , del punt a_i . En particular passa que, per ser null-system $a_i \in g_i(a_i) = \Pi_i$ i per tant $a_i \in \Pi_i$. Finalment $a_i \in \Pi_i \cap l_i$ i $\Pi_i \cap l_i \neq \emptyset$, que és el que es volia. \square

Com es pot observar, l'angle amb el pla singular és el mateix que apareix en l'equació (5.2) de l'apartat 5.2.2 i que intervé en la formulació del moment, ja que, si a és el punt de l'anclatge fix, per la interpretació que es fa a l'apartat 3.4, el null-system que es pren, envia a al pla singular en a . I com que el pla singular és el pla de camins normals, llavors tots dos angles són el mateix.

Teorema 4.1.5. *Un actuator, \mathcal{A}_i tindrà angle zero amb el pla singular de \mathcal{A}_i si i només si pertany al complex lineal generat pels altres cinc actuadors.*

Demostració. Es pren, l_i , la recta associada a \mathcal{A}_i , a_i és l'anclatge fix de \mathcal{A}_i i b , el mòbil. Sigui \mathcal{C}_i el complex lineal generat pels altres 5 actuadors, i Π_i , el pla singular de l'actuator \mathcal{A}_i . Que l'angle sigui zero vol dir que l_i és de Π_i . Pel cas no especial, aquesta condició, equival a que l_i sigui autopolar respecte el null-system determinat a partir de \mathcal{C}_i , segons la demostració del teorema 3.3.4. I, finalment, a la mateixa proposició es veu que aquesta condició és equivalent a que la recta, l_i pertanyi al complex lineal, \mathcal{C}_i . Pel cas especial, si la recta forma angle zero amb el pla singular, vol dir que pertany al pla singular, que és un pla que conté la recta, r , sobre la que es construeix el complex lineal, per tant la recta r i l_i seran coplanàries, que a \mathbb{P}^3 es tallen, que és la condició per a que l_i pertanyi al complex. \square

Les característiques de l'angle són:

1. $\alpha_i(\mathcal{K}) \geq 0$.
2. $\alpha_i(\mathcal{K}) = 0$ per algun i si i només si el manipulador està en una configuració singular.
3. $\alpha(\mathcal{K})$ és invariant davant de transformacions euclidianes.
4. $\alpha_i(\mathcal{K})$ té una interpretació geomètrica a l'espai ambient E^3 del manipulador.
5. $\alpha_i(\mathcal{K})$ és computable en temps real.
6. El valor de $\alpha_i(\mathcal{K})$ depèn de la posició de l'anclatge (sobre la mateixa recta de l'actuator) i -èssim de la plataforma fixa.
7. $\alpha(\mathcal{K})$ és invariant davant de semblances.
8. $\alpha(\mathcal{K})$ dóna informació local sobre cadascuna de les potes.

El punt 1 es compleix per com està definit, s'està prenent sempre el valor absolut de l'angle i per tant serà un valor positiu.

El següent apartat també s'ha vist anteriorment, les configuracions singulars queden identificades per ser aquelles que donen valor 0 en la mesura per algun angle (per tots aquells actuadors que estiguin dins del complex lineal generat pels altres cinc).

El punt 3 i 7, es compleix; qualsevol transformació euclidiana que es faci sobre el manipulador no afectarà als resultats obtinguts en les mesures ja que, aquestes, només depenen de la posició relativa dels actuadors, i no de quina posició ocupin aquests a l'espai. Això es demostra a l'observació 3.1.1, que és a on es veu que les coordenades de Plücker es comporten bé amb els canvis de referència projectius, és a dir, que el complex lineal definit per la

imatge de cinc rectes per una projectivitat qualsevol de \mathbb{P}^3 és la imatge del complex lineal per una projectivitat de \mathbb{P}^4 , i en particular per a una semblança o un moviment euclidi. De manera que l'angle entre la recta i el pla singular es conservaran sota semblances i moviments euclidians perquè són projectivitats que conserven els angles.

El punt 4, clarament els valors que s'obtenen són interpretables, ja que es tracta de l'angle que formen una recta i un pla.

El punt 5 ja s'ha vist anteriorment com es calcula i es pot veure que aquest càlcul es fa en un temps finit i petit, ja que es redueix a calcular coordenades de Plücker, resoldre un sistema lineal i fer productes matricials.

El punt 6 es pot explicar mitjançant la interpretació que es dona a l'apartat 3.4. Si es varia el punt corresponent a l'anclatge fix sobre la mateixa recta, el pla de camins normals no té per què ser el mateix; de fet, si el complex és no-especial i la recta no és paral·lela a l'eix del moviment de rotació associat al complex lineal determinat per la resta d'actuadors, el vector velocitat canviarà d'orientació, el pla de camins normals, que és el pla singular, serà diferent i l'angle variarà. Quan la recta sigui paral·lela a l'eix, els plans de camins normals dels diferents punts de la recta seran paral·lels entre ells, i llavors sí que conservarà l'angle. Pel cas d'un complex lineal especial, com es veu a la secció 3.5.5, si la recta de l'eix i la recta de l'actuador \mathcal{A}_i són coplanàries, l'angle serà zero en qualsevol punt; si les rectes es creuen, el pla canviarà d'orientació i l'angle variarà. Per tant és d'esperar que l'angle no es mantingui constant. S'ha fet una simulació per a comprovar aquesta propietat que està a l'annex B.

Finalment, el punt 8 es veu que, en efecte, és així ja que la mesura es defineix sobre cada actuador i per tant s'obtindrà un índex vectorial de sis components, cadascuna amb la informació referent a cada pota.

4.2 Distància d'una recta a la seva polar

Es considera una plataforma d'Stewart-Gough amb $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_6$ els seus actuadors. Pel teorema 3.3.4, la recta associada a l'actuador \mathcal{A}_i , l_i , serà, pel cas no especial, del complex lineal generat per les rectes associades a la resta d'actuadors, \mathcal{C}_i , quan l_i sigui auto-polar respecte el null-system associat al complex lineal \mathcal{C}_i . En base a això es considera aquesta última mesura:

Definició 4.2.1. Si $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_6$ són els actuadors d'una plataforma de Stewart-Gough, i l_i la recta associada a \mathcal{A}_i . Llavors, la *recta polar* de \mathcal{A}_i és la recta polar de l_i relativa al null-system associat al complex lineal generat per les rectes associades a la resta d'actuadors.

Definició 4.2.2. Donat un manipulador en una configuració \mathcal{K} . Siguin $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_6$ els sis actuadors d'una plataforma de Stewart-Gough. Aleshores, la *distància de \mathcal{A}_i a la seva polar*, $\delta_i(\mathcal{K})$, serà la distància entre la recta associada a \mathcal{A}_i , l_i , i la recta polar de \mathcal{A}_i , l_i^* . Té unitats de distància (m, cm,...) segons les unitats en les que es treballi en els eixos de coordenades del manipulador. L'índex pròpiament serà la sèxtupla resultant de posar en ordre les distàncies de cada actuador, $\delta(\mathcal{K})$.

Proposició 4.2.3. Si una recta i la seva polar es tallen, aleshores són coincidents.

Demostració. Sigui l_i la recta associada a l'actuator, \mathcal{A}_i , \mathcal{C}_i , el complex lineal generat per les rectes associades a la resta d'actuadors i g el null-system associat a \mathcal{C}_i segons el teorema 3.3.4. Sigui p el punt d'intersecció entre l_i i la seva polar, l_i^* . Aquest punt, p , és tal que $p \in g(q^*)$ per algun q^* , de l_i^* i $q^* \neq p$. Ara bé, g és un null-system i compleix reciprocitat, per tant passa que $q^* \in g(p)$ i això vol dir que les dues rectes l_i , i l_i^* contenen a p , i a q^* alhora i llavors han de ser coincidents, $l_i = l_i^*$. \square

Teorema 4.2.4. *Siguin $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_6$ els actuadors d'una plataforma de Stewart-Gough. Aleshores, la recta associada a \mathcal{A}_i és del complex lineal generat per les rectes associades a la resta d'actuadors i aquest és no especial, \mathcal{C}_i si i només si la distància de \mathcal{A}_i , a la seva recta polar és zero.*

Demostració. Sigui l_i la recta associada a l'actuator \mathcal{A}_i , i \mathcal{C}_i , el complex lineal generat per les rectes associades a la resta d'actuadors. Si la recta l_i té distància zero respecte la seva polar, l_i^* , vol dir que té un punt d'intersecció amb l_i^* , p . Per la proposició 4.2.3, les dues rectes hauran de ser coincidents. Això vol dir que l_i és autopolar i per tant, pel teorema 3.3.4, serà del complex, \mathcal{C}_i . Pel recíproc, si la recta l_i és del complex, aleshores, l_i és autopolar i llavors $l_i = l_i^*$, per tant la distància a la seva polar serà zero. \square

Com es pot veure, la distància a la polar només està ben definida quan el complex lineal és no especial. Quan el complex lineal sigui especial, cal tenir en compte que la matriu de l'aplicació, g , que dóna la demostració del teorema (3.3.4) és una matriu degenerada, i els elements del nucli de g són els punts de la recta sobre la que es construeix el complex lineal especial, r . Per altra banda, si l és una recta del complex, el ker de l serà tot el pla Π , que conté l i r , ja que, al ser l del complex, és coplanària a l (ja que la talla) i per tot $a \in l$, $g(a) = \Pi$. Per altra banda, la polar de les rectes que no són del complex, és sempre la recta r sobre la que es construeix el complex, de manera que s'està calculant la distància d'una recta a r . Així doncs, és possible estendre el resultat del teorema anterior als complexos lineals especials de la següent manera:

Teorema 4.2.5. *Siguin $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_6$ els actuadors d'una plataforma de Stewart-Gough. Aleshores, la recta associada a \mathcal{A}_i és del complex lineal generat per les rectes associades a la resta d'actuadors si i només si passa que la distància de \mathcal{A}_i a la seva polar és zero, pel cas no especial, o el ker de la recta de \mathcal{A}_i te dimensió estrictament més gran que 1, pel cas especial.*

Demostració. Queda demostrat amb tot el que s'ha dit anteriorment. Si el complex és especial s'estarà calculant sempre la distància d'una recta a la recta sobre la que es construeix el complex, i la distància serà zero només quan aquestes dues siguin coplanàries (es tallin). \square

Les característiques de la distància són:

1. $\delta_i(\mathcal{K}) \geq 0$.
2. $\delta_i(\mathcal{K}) = 0$ si i només si el manipulador està en una configuració singular.
3. $\delta_i(\mathcal{K})$ és invariant sota transformacions euclidianes.

4. $\delta_i(\mathcal{K})$ té una interpretació geomètrica a l'espai ambient E^3 del manipulador.
5. $\delta_i(\mathcal{K})$ és computable en temps real.
6. El valor de $\delta_i(\mathcal{K})$ no depèn de la posició dels anclatges de la plataforma mòbil.
7. Sota similituds, $\delta(\mathcal{K})$ varia en proporció al factor d'escala.
8. $\delta(\mathcal{K})$ dóna informació local sobre cadascuna de les potes.

Les demostracions de tots els apartats es fan de manera anàloga a les de característiques de l'angle, tret dels punts 4, 6 i 7.

Pel, punt 4, la interpretació no és la mateixa que la de l'angle, en aquest cas es tracta d'una distància però igualment existeix una interpretació física de qualsevol valor que es pugui obtenir en la mesura.

El punt 6, com que la recta polar no depèn de quins punts es triïn, la distància també serà independent a on estiguin aquests punts, sempre i quan es trobin a la recta de l'actuador.

Pels que resten, anàlogament al que es diu als punts 3 i 7 de l'angle, amb la distància passa el mateix, únicament que per les semblances la distància quedarà multiplicada per la constant de dilatació, ja que les distàncies no es conserven en les semblances.

Finalment, es defineix la proximitat segons $\alpha(\mathcal{K})$ i $\delta(\mathcal{K})$.

Definició 4.2.6. Siguin \mathcal{K}_1 i \mathcal{K}_2 dues configuracions, no necessàriament singulars d'un manipulador, es diu que \mathcal{K}_1 és més pròxima que \mathcal{K}_2 a una configuració singular segons α o δ quan $\min(\alpha(\mathcal{K}_1)) < \min(\alpha(\mathcal{K}_2))$ o $\min(\delta(\mathcal{K}_1)) < \min(\delta(\mathcal{K}_2))$. En base a això es defineix la relació \leq_α com: $\alpha(\mathcal{K}_1) \leq_\alpha \alpha(\mathcal{K}_2)$ si i només si $\min(\alpha(\mathcal{K}_1)) < \min(\alpha(\mathcal{K}_2))$, i anàlogament per a \leq_δ .

Gràcies al fet que les dues mesures tinguin una interpretació geomètrica, amb aquesta definició queda formalitzat, segons cada mesura, el significat de proximitat a una singularitat que s'havia introduït a la definició 2.2.2.

Capítol 5

Preàmbul de les simulacions

Aquest capítol, té com a finalitat donar més eines per a valorar i analitzar com de bona és la solució que s'ha plantejat de cara a l'estàtica. Tot i que aquesta bondat es podria analitzar en base a les propietats esmentades a la secció anterior, per a complementar aquest anàlisi es realitzaran un conjunt de simulacions, dissenyades específicament per a aquest estudi, que contribueixin a avaluar la bondat de les mesures en aquest context.

5.1 Disseny dels experiments

El procediment que se segueix en aquestes simulacions és el següent:

1. Es numeren els actuadors del manipulador; \mathcal{A}_1 , \mathcal{A}_2 , \mathcal{A}_3 , \mathcal{A}_4 , \mathcal{A}_5 i \mathcal{A}_6 , dels quals es coneix, en tot moment, la posició dels anclatges (de manera que la configuració de les cadenes cinemàtiques queda unívocament determinada) i a continuació es descriu l'arquitectura del manipulador, així com la trajectòria que efectuen els anclatges dels actuadors. En algunes simulacions, aquesta modificació correspon a un moviment simulat d'un mateix manipulador, en d'altres, la modificació és la deformació de l'arquitectura i els passos intermitjos corresponen a arquitectures de diferents manipuladors.
2. Es discretitza el moviment i en cada pas de la discretització es calcula, per a la configuració resultant, el valor de les dues mesures de referència: el moment i el determinant de la jacobiana, que s'introduïran en la secció posterior, i les dues mesures que s'introdueixen en aquest projecte: la distància a la recta polar i l'angle amb el pla singular.
3. Es realitza el moviment que, partint d'una posició regular, porta el manipulador a la configuració singular i es guarden els valors de cadascuna de les mesures preses. Finalment es representaran gràficament els resultats obtinguts.

5.2 Mesures de referència

En aquesta avaluació preliminar de les solucions plantejades se simularà, també, el comportament de dues mesures de referència: el determinant de la matriu jacobiana i el moment

d'una recta respecte d'un complex. És ben sabut, com s'indica entre d'altres a [11], que el jacobí, tot i que pot servir de referència, i de fet és amb aquesta finalitat que s'inclou a les simulacions, no és una bona mesura. El moment és una eina que es fa servir per a calcular complexos lineals de regressió, però no s'ha utilitzat mai per a mesurar proximitat a les singularitats.

5.2.1 Determinant de la matriu jacobiana

Com s'ha vist, la caracterització d'una singularitat depèn de les relacions de dependència lineal de les coordenades de Plücker com a vectors de \mathbb{R}^6 . La matriu, \mathbf{P} , és la matriu que té com a columnes el representant normalitzat de les coordenades de Plücker de les rectes associades a cadascun dels actuadors de la plataforma. A més a més, a la secció 2.2 s'aprecia aquesta dependència directa del jacobí per part de molts índexos.

Un manipulador estarà en una configuració singular si i només si $|\mathbf{P}| = 0$. Partint d'aquí, es farà servir el determinant de la matriu jacobiana $|\mathbf{J}|$, que es trobarà calculant $|\mathbf{P}|$, per avaluar la proximitat a una singularitat. Aquesta mesura, així com d'altres que en depenen (índex de manipulabilitat, nombre de condició...), ha estat analitzada per Merlet en [11] i conclou que no és prou apropiat per a robots paral·lels: els seus valors estan subjectes a canvis de normes i unitats. Tot i això, en [11] és el determinant de la jacobiana el que presenta el millor comportament de cara a analitzar la precisió en exemples pràctics, comparat amb l'índex de manipulabilitat i el nombre de condició; és per això que es prendrà com una mesura de referència en aquesta memòria, per a contrastar amb la resta de mesures proposades.

5.2.2 Moment d'un actuator respecte d'un complex lineal

És una mesura que està definida a partir del *moment d'una recta respecte un complex* [7] que es fa servir a [12] amb l'objectiu de construir el complex lineal que millor aproxima a un conjunt de rectes de \mathbb{P}^3 , que s'anomena *complex lineal de regressió*.

Definició 5.2.1. El *moment* d'un actuator, \mathcal{A} , de recta l , respecte d'un complex lineal \mathcal{C} , d'equació $\sum_{0 \leq i < j \leq 3} c_{i,j} a_{i,j} = 0$, amb $c_{i,j}$ els coeficients, és

$$m(l, \mathcal{C}) = \frac{|\bar{\mathbf{c}} \cdot \mathbf{r} + \mathbf{c} \cdot \bar{\mathbf{r}}|}{\|\mathbf{c}\|} = \frac{1}{\sqrt{c_{1,2}^2 + c_{1,3}^2 + c_{2,3}^2}} \left| \sum_{0 \leq i < j \leq 3} c_{i,j} l_{i,j} \right|, \quad (5.1)$$

Amb \mathbf{c} i $\bar{\mathbf{c}}$ trobats a partir de $(c_{0,1}, c_{0,2}, c_{0,3}, c_{1,2}, c_{1,3}, c_{2,3})$ com $\mathbf{c} = (c_{2,3}, -c_{1,3}, c_{1,2})$ i $\bar{\mathbf{c}} = (c_{0,1}, c_{0,2}, c_{0,3})$, \mathbf{r} i $\bar{\mathbf{r}}$ calculats a partir de l , segons el final de la secció 3.4, $\|\mathbf{r}\| = 1$ i $l_{i,j}$ les components del representant normalitzat de les coordenades de Plücker de la recta l . A [12] es dóna la següent interpretació geomètrica pel moment: siguin \mathcal{C} , un complex lineal associat a un moviment d'eix A i raó p ; l , una recta i x , un punt de la recta. Sigui r la distància de x a l'eix A del complex \mathcal{C} amb relació p . Sigui $\alpha \in [0, \pi/2]$ el menor angle entre l i una recta de \mathcal{C} a través de x , o, en altres paraules, l'angle entre l i el pla en que es troben les rectes de \mathcal{C} que passen per x . Llavors, el moment es pot expressar com:

$$m(l, \mathcal{C}) = \left(\sqrt{r^2 + p^2} \right) \sin \alpha. \quad (5.2)$$

Quan la recta l sigui del complex \mathcal{C} , el moment $m(l, \mathcal{C})$ valdrà 0. Ja que si l és del complex lineal, \mathcal{C} ; les coordenades de Plücker de la recta l , $(l_{0,1}, l_{0,2}, l_{0,3}, l_{1,2}, l_{1,3}, l_{2,3})$, compleixen l'equació de l'hiperplà, que és el mateix que dir que:

$$\sum_{0 \leq i < j \leq 3} c_{i,j} l_{i,j} = 0,$$

i, aleshores,

$$m(l, \mathcal{C}) = \frac{1}{\sqrt{c_{1,2}^2 + c_{1,3}^2 + c_{2,3}^2}} \sum_{0 \leq i < j \leq 3} c_{i,j} l_{i,j} = 0,$$

i, en efecte, el moment és zero.

Observació 5.2.2. És important fer notar que, per a què la definició tingui sentit, cal que estigui definida sempre sobre el mateix representant de $\mathbf{p}(l)$ (en aquest cas el normalitzat) ja que, si no, el valor del moment quedarà multiplicat per una constant arbitrària.

Capítol 6

Anàlisi per a l'estàtica

Com s'ha en el capítol anterior, s'abordarà únicament l'estàtica. La finalitat és, en base a les propietats que compleixen les mesures i les simulacions que s'efectuaran, determinar si, en absència de moviment, les solucions que s'han proposat permeten valorar el grau de rigidesa o estabilitat d'un manipulador. En particular estudiar, si dues poses d'un manipulador donat poden ser comparades per a conèixer quina d'elles és més propera a una singularitat.

6.1 Simulacions

En aquesta secció es descriuran les simulacions que s'han fet i es farà una avaluació inicial dels resultats obtinguts en cada simulació per separat. Posteriorment es donarà un anàlisi més global en base a aquestes avaluacions inicials i a les propietats descrites al capítol previ.

6.1.1 Aproximació a una singularitat de rang 1

Es farà una simulació que porti un manipulador cap a una configuració de rang 1. S'ha considerat una plataforma que té els actuadors \mathcal{A}_1 i \mathcal{A}_2 amb l'anclatge fix comú, i s'ha fet tendir en una trajectòria rectilínia l'extrem mòbil de l'actuator \mathcal{A}_2 cap a l'extrem mòbil de l'actuator \mathcal{A}_1 , de manera que en un moment siguin la mateixa recta i és en aquest moment quan s'haurà assolit la singularitat. La resta d'actuadors es mantenen fixos i iguals que en la configuració inicial no singular.

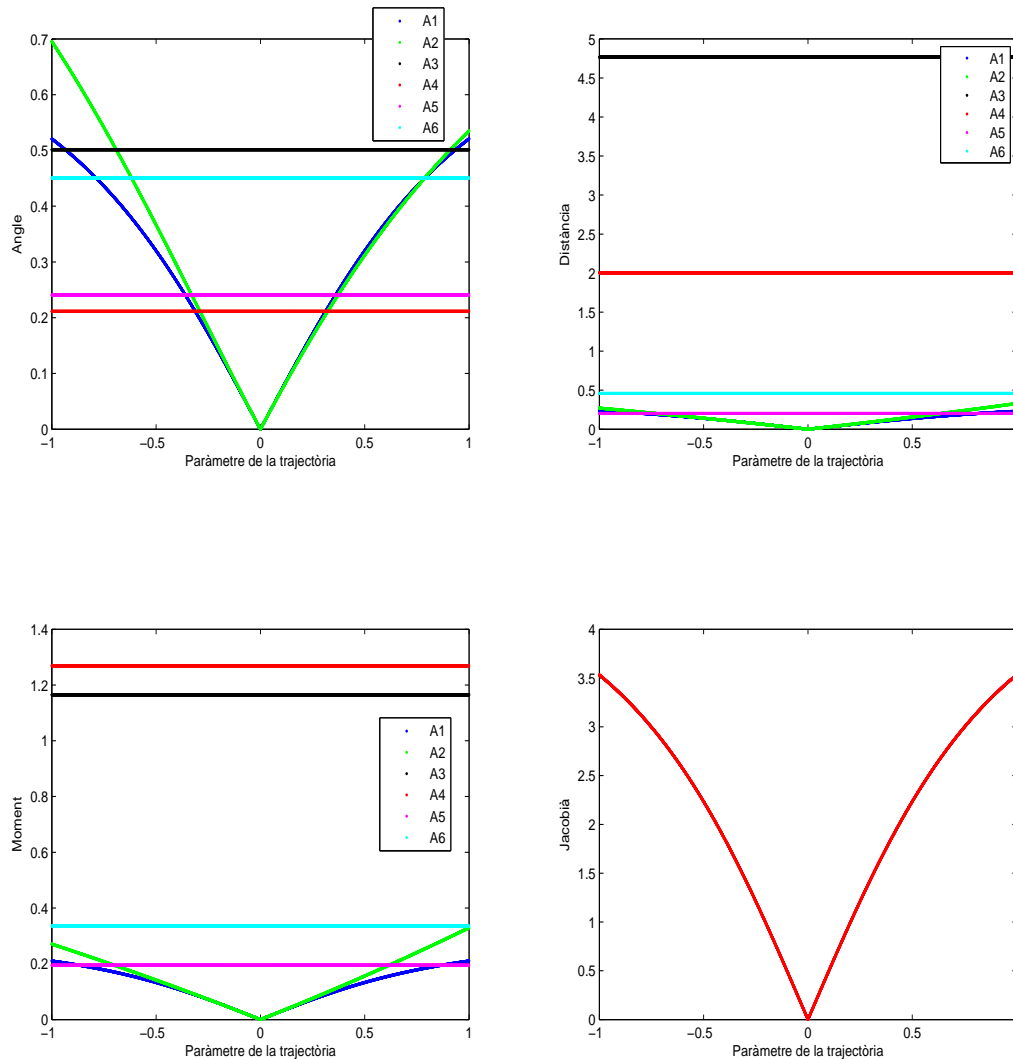


Figura 6.1: En ordre d'esquerra a dreta i de dalt a baix: variació de l'angle, distància a la polar, moment i determinant de la jacobiana per un manipulador d'una arquitectura concreta que s'apropa a una singularitat de rang 1.

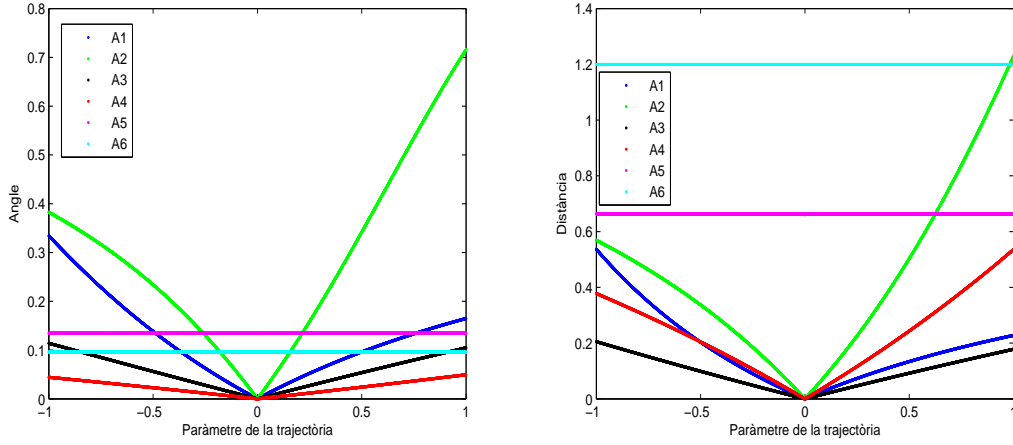
Com es pot comprovar la formació de la singularitat, que es dona en el centre de la trajectòria, queda clarament reflectida pel comportament de les mesures. Una cosa que sobta és que els actuadors no involucrats mantenen la resta de mesures constants. Això es deu a què, per un actuador dels que no acaben essent coincidents, el complex lineal format pels altres actuadors és tota l'estona el mateix, ja que el feix de rectes d'aproximació, és a dir el generat per l'actuador que es mou en la configuració inicial i l'actuador al que s'aproxima, està contingut en aquest complex, i per tant, moure aquest actuador dins d'aquest feix no fa variar el complex. Cal mencionar que els actuadors que mantenen constant l'angle, per l'instant que s'assoleix la singularitat, cap de les mesures està definida i el programa dona un

valor arbitrari pel mal condicionament de la matriu associada al sistema que s'ha de resoldre per trobar el punt que és conjugat respecte \mathbb{G} de les imatges per l'aplicació de Plücker de les rectes associades als altres actuadors.

6.1.2 Aproximació a una singularitat de tipus 3D movent un sol actuator

El segon moviment és molt semblant a l'anterior però canvia la configuració de partida i singularitat que es forma. S'ha considerat una plataforma que té els actuadors \mathcal{A}_1 i \mathcal{A}_2 i \mathcal{A}_3 de manera que els seus anclatges mòbils siguin coincidents en un punt comú, p i que no siguin coplanaris. S'ha fet tendir l'extrem mòbil de l'actuator \mathcal{A}_4 a aquest punt seguint una trajectòria rectilínia. Els actuadors \mathcal{A}_5 i \mathcal{A}_6 es mantenen fixats igual que en una posició no singular inicial respecte els altres 4. La singularitat s'assoleix quant la quarta recta interseca el punt p .

Els resultats obtinguts són els següents:



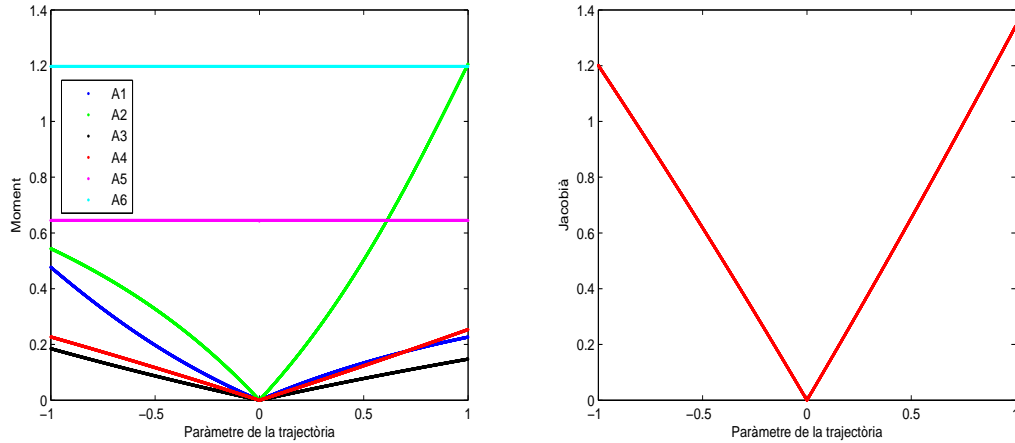


Figura 6.2: En ordre d'esquerra a dreta i de dalt a baix: variació de l'angle, distància a la polar, moment i determinant de la jacobiana per un manipulador que s'apropa a una singularitat de tipus 3D seguint una trajectòria rectilínea.

Igual que al cas anterior és possible determinar, a partir dels valors que prenen les mesures, en quin moment de la trajectòria es dona la singularitat i, a més a més, sembla que és possible veure quins actuadors estan involucrats en la formació de la singularitat.

De nou s'observa que els actuadors no involucrats mantenen les seves mesures constants, l'explicació, que surt d'una de les proposicions incloses als annexos (la proposició A.0.1), és la següent: es considera l'actuador virtual (auxiliar) \mathcal{A} que té anclatge mòbil p i anclatge fix a_4 , que és l'anclatge fix de \mathcal{A}_4 , i sigui l la seva recta associada. Per la proposició A.0.2, el pla de \mathbb{P}^5 , generat per $\mathbf{p}(l_1)$, $\mathbf{p}(l_2)$ i $\mathbf{p}(l_3)$ és el mateix que el generat per $\mathbf{p}(l_1)$, $\mathbf{p}(l_2)$ i $\mathbf{p}(l)$. Aleshores, la proposició A.0.1 diu que la recta de \mathbb{P}^5 generada per $\mathbf{p}(l)$ i $\mathbf{p}(l_4)$, és la mateixa per tot el moviment de \mathcal{A}_4 . En conclusió, la varietat lineal 3-dimensional generada per $\mathbf{p}(l_1)$, $\mathbf{p}(l_2)$, $\mathbf{p}(l_3)$ i $\mathbf{p}(l_4)$ és la mateixa per tot el moviment de \mathcal{A}_4 , i afegint l_5 , o bé l_6 donarà lloc al mateix complex lineal al llarg de tot el recorregut.

En aquestes dues simulacions es pot veure com, en efecte, les dues mesures identifiquen clarament les configuracions singulars, donen valors d'ordres de magnituds molt semblants en casos de manipuladors de dimensions semblants, que és una cosa que cal esperar d'una bona mesura i a més a més sembla que poden aportar certa informació sobre la naturalesa de la singularitat que es forma en base a quins actuadors són els que la seva mesura va cap al valor 0.

6.1.3 Aproximació a una singularitat de tipus 3D

En aquesta tercera simulació es deforma l'arquitectura d'un manipulador que parteix d'una configuració regular inicial amb els actuadors disposats en una posició arbitrària, i el porta cap a una configuració singular de tipus 3B. Aquesta singularitat es dona quan les rectes associades a quatre actuadors, en aquest cas \mathcal{A}_1 i \mathcal{A}_2 , \mathcal{A}_3 i \mathcal{A}_4 tenen un punt d'intersecció comú. Així doncs, s'ha calculat el baricentre en la configuració inicial dels extrems mòbils

dels actuadors citats i s'ha fet tendir cadascun a aquest baricentre seguint una trajectòria rectilínia. La singularitat s'assoleix en el punt mig d'aquesta trajectòria.

Resultats

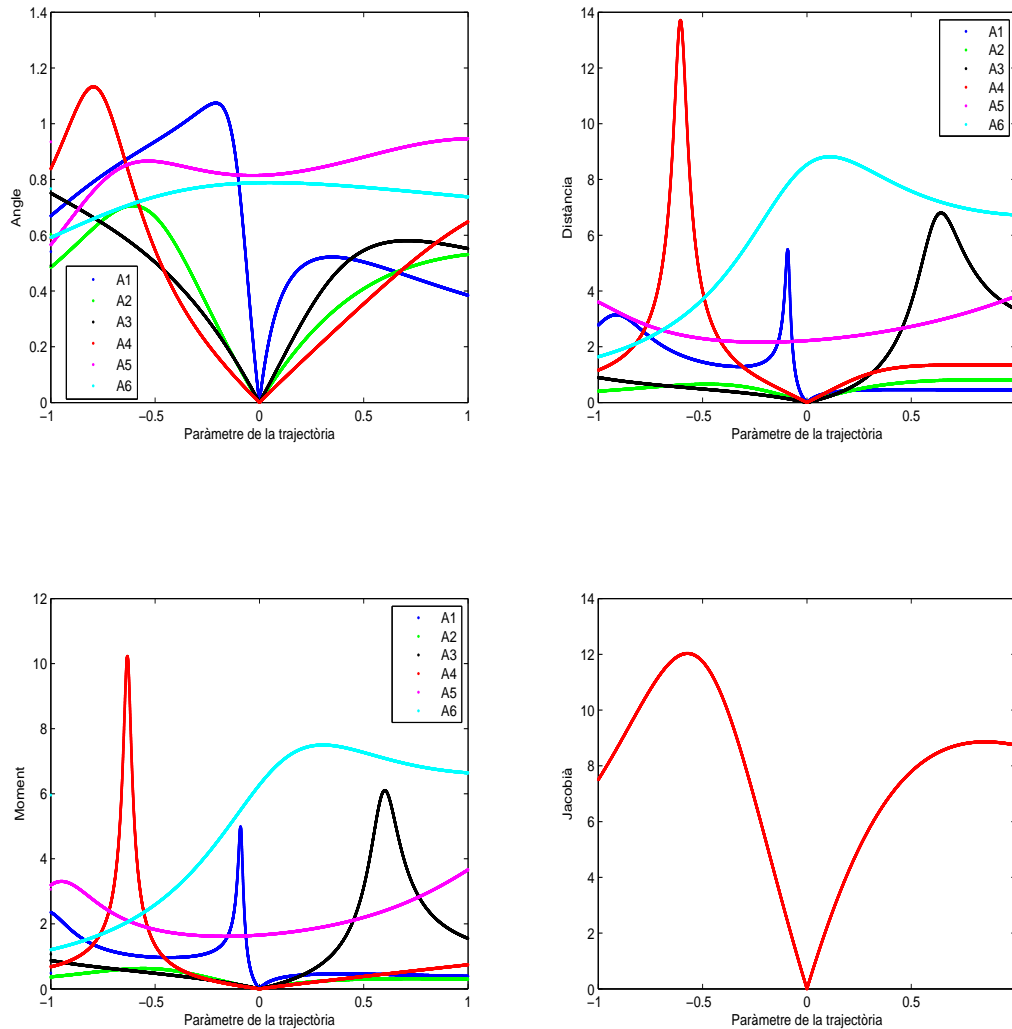


Figura 6.3: En ordre d'esquerra a dreta i de dalt a baix: variació de l'angle, la distància a la polar, el moment i determinant de la jacobiana per un manipulador que s'apropa a una singularitat de tipus 3d fent quatre actuadors tendir al seu baricentre.

Anàlisi

Com es pot observar i com s'ha demostrat, la singularitat queda completament caracteritzada per donar 0 en totes les mesures. A més a més, els quatre actuadors involucrats en la formació

de la singularitat són els que donen valor zero en el moment en què aquesta s'assoleix, mentre que els que no ho estan es mantenen allunyats dels 0 radians.

6.1.4 Aproximació a una singularitat de Hunt

La singularitat de Hunt és una singularitat de Rang 5, de tipus 5B, és a dir, les rectes associades als sis actuadors intersequen una recta donada. Per una plataforma de tipus 6-3, és a dir, amb sis anclatges fixos i tres anclatges mòbils, de manera que a cada anclatge mòbil hi van exactament dos actuadors, la singularitat es dona quan el pla de la plataforma mòbil conté a les rectes de dos actuadors [14]. Els resultats obtinguts d'aquesta simulació seran d'utilitat tant per a l'estudi de l'estàtica com per a la cinemàtica, ja que el moviment que es realitza és un moviment reproducible d'un cas de manipulador real. Es tracta d'un manipulador amb únicament 3 anclatges mòbils diferents, ja que els actuadors coincideixen de dos en dos en els seus extrems. Els anclatges fixos dels actuadors estan disposats en el mateix pla, i aleshores la parella d'actuadors $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ tenen els extrems coincidents a p , i el mateix per $\mathcal{A}_3, \mathcal{A}_4$, a q i $\mathcal{A}_5, \mathcal{A}_6$, a r de manera que la plataforma superior queda determinada per la posició de p, q i r . El moviment que s'ha dut a terme consisteix en una rotació del punt q en un rang d'amplitud $\frac{\pi}{2}$ al voltant de l'eix \overline{pr} . La singularitat s'assoleix quan p, q, r i els anclatges fixos de \mathcal{A}_3 i \mathcal{A}_4 es troben al mateix pla, fet que succeeix per a $\alpha = \frac{\pi}{4}$, que s'ha fet coincidir amb el punt mig de la trajectòria. En aquest instant s'haurà assolit la singularitat de Hunt. Es tractarà d'una configuració singular de rang 5, ja que les rectes associades a tots els actuadors tindran intersecció no buida amb l'eix pr . Aquest és un exemple que apareix en [14].



Figura 6.4: Arquitectura corresponent a la simulació 6.1.4.

Resultats

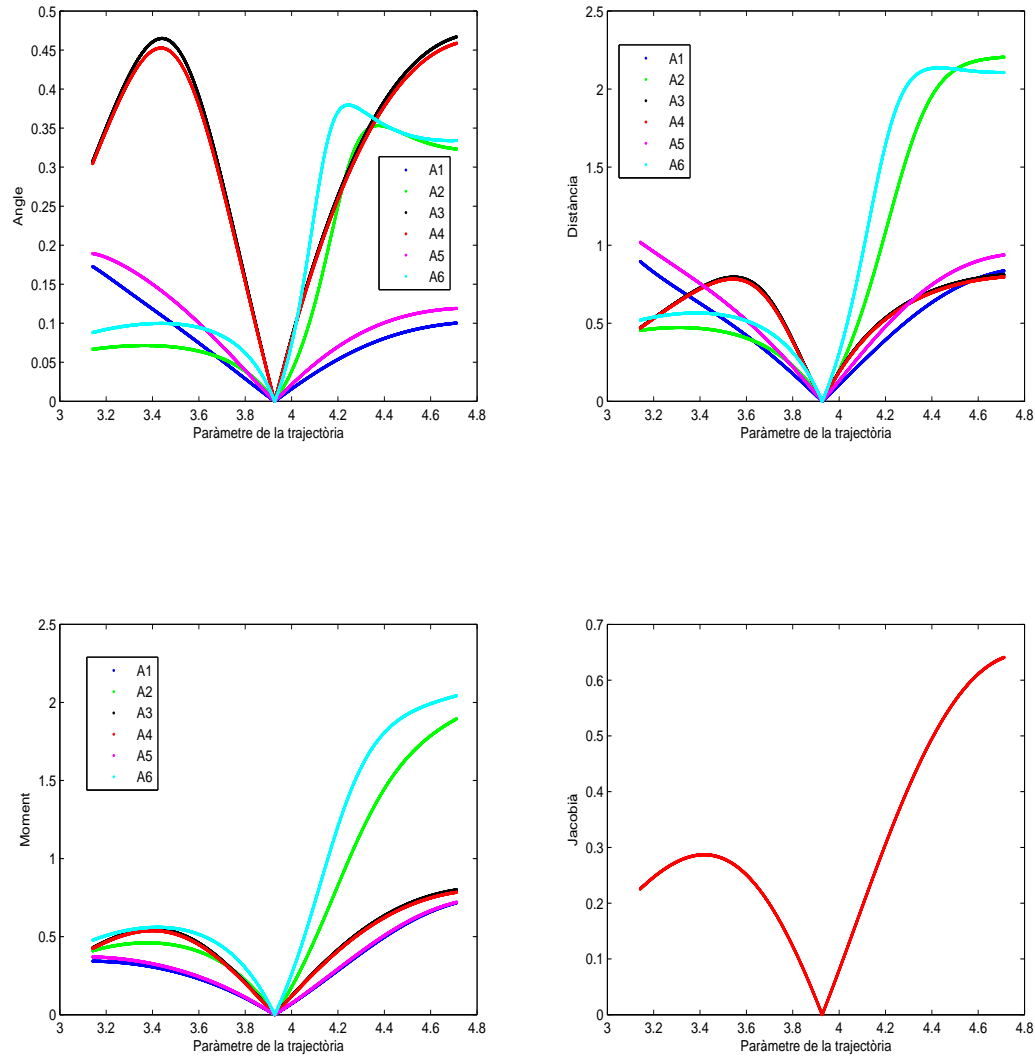


Figura 6.5: En ordre d'esquerra a dreta i de dalt a baix: variació de les mesures de l'angle, la distància a la polar, el moment i el determinant de la jacobiana en una simulació d'una singularitat de Hunt (tipus 5B).

Anàlisi

En aquest cas, les mesures de tots els actuadors tendeixen a zero, fet que va lligat amb que sigui una singularitat de rang 5. Una altra cosa a destacar, és que els ordres de magnitud dels valors en les mesures s'han conservat respecte a la simulació anterior.

6.2 Anàlisi general

L'objectiu és estudiar si aquestes dues mesures permeten comparar dues configuracions en termes de quina és més pròxima a una singularitat. En el fons es tracta d'avaluar com de bones són les propietats que compleixen aquests índexos, així com el seu comportament a les simulacions i, en funció de tot plegat, es dirà si són o no són índexos apropiats. Com s'ha formalitzat en el capítol 4, es considerarà el mínim de l'angle i la distància com a índexos globals de proximitat de cadascuna de les mesures.

Les propietats que s'han donat anteriorment de cadascuna de les mesures són atributs molt importants de cara a tenir en compte en aquest anàlisi. La majoria són característiques necessàries que han de complir per a que es puguin considerar d'utilitat en aquest camp i que molts pocs índexos de tots els que s'han introduït fins ara compleixen: que identifiquin unívocament les singularitats, que siguin invariants davant transformacions euclidianes, que siguin procediments computables en temps real i que siguin invariants davant similituds. En el cas del jacobinà, per exemple, no hi és aquest control sobre com varia el seu valor davant de similituds.

La interpretació geomètrica mereix una menció especial. En molts índexos que s'han analitzat [13], si bé per a una mesura M , el valor $M = 0$ té una interpretació (el robot es troba en una configuració singular), el valor $M = 0.5$ per exemple, no té cap significat. Aquest fet no succeeix en les mesures que s'estan plantejant, perquè es tracta d'un angle i d'una distància i és, ja només per aquest fet de tenir interpretació geomètrica, que suposen una contribució bastant important en aquest terreny. De fet, és precisament per això que es tracta d'índexos globals, és a dir, que permeten comparar diverses posicions d'un sol manipulador i de diferents manipuladors, cosa crucial per al disseny.

A l'estàtica les velocitats de treball no es tenen en compte. En base a aquesta disposició i al que ja s'ha vist que compleixen aquestes mesures, un factor més que s'avaluarà per a completar aquest anàlisi de bondat d'aquestes mesures és veure si es tracta de mesures robustes, és a dir, si resultats semblants en els valors que donen les mesures, tenen interpretacions semblants en termes de proximitat a les singularitats. Donar una demostració formal d'aquest fet és molt complicat. En el fons consistiria a demostrar que les mesures que es presenten són funcions uniformement contínues en entorns de les configuracions singulars. Però aquestes funcions són molt difícils de definir analíticament perquè són aplicacions que surten de l'espai de configuracions del manipulador, que ja per si sol és complicat de formalitzar. Així doncs, s'ha d'optar per una demostració no formal i, per tant, experimental, que és part del propòsit que compleixen les simulacions anteriors.

Per tal d'avaluar la robustesa, es buscarà en els experiments dissenyats si existeixen entorns de les singularitats tals que per variacions semblants del paràmetre de moviment es donin variacions semblants en les mesures obtingudes. Es pot comprovar que això amb el jacobinà no passa. Ja d'entrada l'ordre de magnitud dels valors que dona canvia en cada simulació. Per altra banda, es pot comprovar que en totes les simulacions per l'angle, el rang de valors que s'obté en entorns de poca amplitud del paràmetre de la trajectòria no només són del mateix ordre de magnitud, sinó que són valors molt semblants, queden sempre confinades per sota dels 0.1 radians. En la distància no queden tan fitats però sí que més o menys

es mouen dins del mateix ordre de magnitud. Per tant, es pot dir que en els experiments realitzats les dues mesures presenten aquesta robustesa.

En definitiva, s'ha vist que les mesures tenen, ambdues, boníssimes propietats, entre les quals es troba que identifiquen clarament les singularitats. A més a més, a diferència d'altres índexos, com ara el jacobià, l'angle no és sensible davant de similituds; la distància sí, però se sap en quina mesura afecta (el factor d'escala). I són índexos que, al no ser escalars, aporten més informació que el jacobià. Per tant es pot dir que sí que suposen una contribució a l'estàtica i que poden permetre comparar dues configuracions diferents, tenint una interpretació geomètrica molt clara a l'espai de configuracions del manipulador, fet que resol el problema que es plantejava inicialment. A més a més veient les simulacions es pot observar també que reflecteix en els resultats quin tipus de singularitat s'està formant i quins són els actuadors involucrats en la formació d'aquesta singularitat, cosa que és impensable d'índexos unidimensionals.

La diferència principal entre les dues mesures és el fet de que una depengui de en quina posició de la recta associada a l'actuator es troba l'anclatge fix. Aquesta és una propietat molt interessant, perquè significa que l'angle contindrà informació sobre d'on està colocada la plataforma mòbil respecte de la fixa, i no únicament sobre com estan configurades les rectes associades als actuadors; cosa que vol dir que l'angle pot explicar diferències en l'estabilitat de manipuladors en configuracions similars, però que difereixen en la distància entre la plataforma fixa i la mòbil, essent les de major distància les més inestables. A més a més l'angle és una mesura que es pot aplicar tant a l'anclatge fix com al mòbil i per això seria interessant considerar el vector 12-dimensional que contingui la informació de tots els anclatges.

Capítol 7

Disseny de l'estudi posterior

En aquest capítol s'explica, de manera detallada com s'hauria de procedir per a realitzar l'anàlisi, considerant ara les velocitats en les trajectòries, per a avaluar com d'apropiades són aquestes mesures per a l'estudi de les singularitats des d'un punt de vista de la cinemàtica. A més a més s'inclouen, també en detall, altres possibles àmbits d'aplicació d'aquestes mesures.

7.1 Anàlisi per a la cinemàtica

La manera de procedir per a realitzar l'anàlisi cinemàtic és, en part, anàloga al mètode anterior però introduint alguns canvis significatius. Les dues mesures que s'han introduït prenen valors que només depenen de les configuracions dels actuadors, així com, en el cas de l'angle, de la posició relativa de les plataformes. Ara bé, com s'ha observat a les simulacions, sí que és cert que les velocitats es poden veure reflectides en el valor de les derivades numèriques d'aquestes mesures respecte dels diferents paràmetres de les trajectòries, i per tant, aquestes derivades s'hauran de tenir en compte de cara a l'anàlisi, juntament amb el valor dels índexos. A més a més, l'eina de referència ara no serà el *jacobià* tal com s'havia definit anteriorment. Aquesta versió del *jacobià* que s'ha estat fent servir fins ara s'anomena *jacobià geomètric* i no conté informació sobre les velocitats. La nova referència serà el *jacobià analític*, que és més complicat de definir [4] que el geomètric i depèn de com s'hagi parametritzat el moviment, per això en aquest cas serà primordial triar una parametrització adequada de la orientació que no introdueixi singularitats (és a dir, una representació no minimal).

Per altra banda cal que es tracti de simulacions de casos de moviments realitzables, com és cas de la simulació 6.1.4, i no només això, sinó que és imprescindible dur a terme simulacions amb exemples reals de manipuladors i comprovar que realment la informació de les mesures i les derivades són congruents amb la rigidesa del manipulador. Així doncs, amb aquest objectiu cal:

- Fer simulacions de moviments realitzables i experiments amb manipuladors, i avaluar les mesures i les seves derivades, prenent com a referència el *jacobià analític*, en entorns de configuracions singulars conegudes, analitzant com es reflecteix aquesta proximitat en els valors que prenen les mesures quan el robot està proper a perdre la rigidesa.

- En cas que els resultats del pas anterior siguin positius, és a dir que, aquests dos índexos tinguin aplicació en la cinemàtica, buscar si existeix un valor o conjunt de valors llindars a partir dels quals es pugui assegurar que el manipulador tindrà un comportament propi d'una configuració singular (pèrdua de rigidesa).
- Buscar si existeix un valor o conjunts de valors a partir dels quals es pugui assegurar que el manipulador no es trobarà en un entorn d'una singularitat, i per tant assegurar que no hi haurà cap pèrdua de rigidesa (hi haurà regularitat).

Per al primer pas s'han de realitzar, com a mínim, tres experiments diferents de moviments amb un manipulador real en entorns de singularitats i, posteriorment, elaborar l'anàlisi avaluant si hi ha congruència entre els valors que donen les mesures i la proximitat a les singularitats, en termes del comportament del manipulador; a més tot això es contrastarà amb els valors que dona el jacobià analític i amb el que s'ha obtingut a les simulacions teòriques on únicament entrava en joc el jacobià analític. Cal que aquests tres experiments reals siguin amb el mateix manipulador per tal que el canvi de dimensions no afecti als resultats.

Per al segon i tercer pas l'estudi s'enfocarà per a cada manipulador. Es determinarà, mitjançant el nombre necessari de simulacions, quins són els intervals de pèrdua de rigidesa, o quin són els intervals de regularitat que donen les mesures que, per haver donat resultats positius en el primer pas, estan directament relacionats amb la proximitat o llunyania a les configuracions singulars. Aquest nombre de simulacions pot dependre del camp d'aplicació del manipulador, és a dir, no cal estudiar el conjunt de configuracions sencer, només amb restringir-lo al subconjunt en el que treballarà el manipulador (work-space) és suficient. Finalment cal realitzar un últim estudi analitzant si és possible generalitzar el càlcul d'aquests intervals en base a característiques intrínseques del manipulador, que en aquest cas es reduiria al work-space (que també inclou les limitacions per disseny dels elements que els formen, com ara límit d'elongació en els actuadors, etc) i a la posició dels anclatges fixos.

Per acabar, una altra qüestió a considerar és estudiar si aquests dos índexos vectorials reflecteixen també la isotropia.

La isotropia en robots és una propietat puntual. Es diu que un manipulador presenta *isotropia* quan, en almenys un punt del seu espai de treball, algunes de les seves propietats estàtiques o cinemàtiques són homogènies respecte totes les direccions. Aquesta isotropia es pot enmarcar en un context de velocitats, de forces o de moments i és una propietat molt interessant de cara al disseny. Així doncs, una proposta de treball futur seria aprofundir en aquesta direcció.

Capítol 8

Avaluació Econòmica

8.1 Pressupost

El pressupost es desglossa de la següent manera:

- 415 hores d'enginyer
- 30 hores de programació

Els costos horaris són:

- Costos d'enginyer: 25,00 euros/hora
- Costos de programador: 20,00 euros/hora

Per tant, el subtotal d'execució es calcula com:

- Cost Enginyer: 10.375,00 euros
- Cost Programador: 600,00 euros
- Subtotal d'execució: 10.975,00 euros

Aquests honoraris estan fets sense considerar les despeses generals per consum d'energia elèctrica, paper, tinta, etc. inherents a la realització del projecte, apart del benefici i l'IVA. A continuació es pot veure com contribueix cada part al càlcul del pressupost total.

- Subtotal d'execució: 10.975,00 euros
- Despeses generals (6%): 658,50 euros
- Benefici (15%): 1.646,25 euros
- Subtotal: 13.306,75 euros
- IVA (21%): 2.794,42 euros
- TOTAL: 16.101,17 euros

8.2 Justificació econòmica

Els objectius del projecte s'han assolit: s'està oferint una solució al problema que s'ha plantejat. Tots els passos que s'han seguit han sigut estrictament necessaris tant per a poder formalitzar aquesta proposta de solució i caracteritzar les seves propietats, com per a poder avaluar posteriorment el seu comportament, de manera que els costos d'hores de treball d'enginyer i de programació queden completament justificats. Tant de cara al disseny com al control, les mesures que es presenten permeten obtenir, a priori, més informació de models hipotètics; fet que comporta un estalvi de costos de disseny. Ara bé, quantificar aquest estalvi que s'obté és molt complicat i de fet, quantificar el benefici directe que s'obté de realitzar un projecte d'investigació és en general bastant difícil. Per altra banda, les dues mesures que es proposen poden ser explotades en altres direccions diferents a les que s'ha estat treballant, és a dir, tot i que el plantejament inicial és resoldre l'estàtica i realitzar el disseny de l'estudi per a la cinemàtica, els índexos poden tenir utilitat en altres camps, i és per això que, en certa manera, s'està obtenint més que el que estava previst a priori.

Capítol 9

Estudi d'impacte ambiental

Donat que es tracta d'un projecte enmarcat en un context purament teòric la seva realització té un impacte ambiental molt més petit que el que pot tenir un projecte de caire més pràctic com podria ser el cas de projectes que tinguin alguna activitat d'explotació posterior associada. Realitzar experiments i seguir aprofundint en possibles camps d'aplicació de la solució que es proposa, mantenint sempre les bones pràctiques, no es pot considerar un impacte o efecte ambientals, ja que suposa consums molt semblants als que s'han estat realitzant durant la redacció de la memòria i per tant, es consideren més aviat en la part de costos del projecte. Per altra banda, el consum d'energia elèctrica associat a simulacions amb robots reals no seria ni molt menys un consum gran i no hauria de tractar-se de manera diferent a l'associat a la redacció de la memòria. Cal afegir que al llarg del projecte s'ha treballat seguint bones pràctiques, és a dir evitar impresions innecessàries i fent servir el format electrònic sempre que ha sigut possible. Així doncs, l'impacte ambiental tant del projecte com dels estudis posteriors que s'han definit en aquesta memòria seran nuls o negligibles.

Conclusions i recomanacions

L'angle amb el pla singular i la distància a la recta polar compleixen amb el que s'espera de les mesures que donin una idea de proximitat a una configuració singular. Els resultats que s'han donat demostren que identifiquen inequívocament les configuracions singulars, i en les simulacions que s'han dut a terme s'aprecia que en un entorn d'aquestes singularitats el comportament de les mesures és robust, cosa que permet fer-les servir com a referència de cara a l'estàtica. A més d'exhibir aquest bon comportament aquestes dues solucions tenen una clara interpretació geomètrica, cosa fonamental i novedosa, i són computables en temps real. No només això sinó que, a més de donar nocions globals de proximitat, també aporten informació més detallada sobre el que està passant a cadascuna de les cadenes cinemàtiques del manipulador. Així doncs, partir d'aquí es podrien comparar, en termes de proximitat, dos camins que portin del mateix estat inicial al mateix estat final i, en particular, de tots els possibles entre dues configuracions, es podria buscar el camí que maximitzi, triant la funció adequada, la distància a una singularitat; aquesta seria l'aplicació final.

Com s'indica amb més detall en el capítol 7 aquestes solucions, que estan inicialment plantejades per a resoldre el problema de conèixer la proximitat a les singularitats des de l'estàtica, poden tenir utilitat de cara a analitzar altres propietats dels manipuladors. Així doncs, tot i que el treball futur hauria de prioritzar l'anàlisi de la cinemàtica que s'ha dissenyat a la secció mencionada, seria interessant, de cara a l'explotació de la idea que es presenta, analitzar com pot contribuir en altres àmbits, entre els quals es troben els robots en sèrie que, tot i tenir poca presència en aquest projecte, també és un camp en el que aquestes mesures poden tenir una forta contribució.

Bibliografia

- [1] Borràs, J. Singularity-Invariant Leg Rearrangements in Stewart-Gough Platforms. Tesis doctoral, 2001.
- [2] Bottema, O. i Roth, B. Theoretical Kinematics. *New york: Dover Publ*, 1990.
- [3] Casas-Alvero, E. Analytical Projective Geometry. Per aparèixer a la *European Mathematical Society*, 2012.
- [4] Dutre, S. Bruynickx, H. i De Schutter, J. The analytical Jacobian and its derivative for a parallel manipulator. *IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pàgines 2961-2966, Albuquerque, New Mexico, USA, 1997.
- [5] Frigola, R. Ros, Ll. Roure, F. i Thomas, F. A Wrench-Sensitive Touch Pad Based on a Parallel Structure. *2008 IEEE International Conference on Robotics and Automation Pasadena*, 2008.
- [6] Gosselin, C. i Angeles, J. Singularity analysis of closed-loop kinematic chains. *IEEE transactions on Robotics*, 6(3):281-290, 1990.
- [7] Klein, F. Die allgemeine lineare Transformation der Linienkoordinaten, in: *Gesammelte math. Abhandlungen I*, Berlin: Springer, 1921.
- [8] McCarthy, J. M. *Geometric design of linkages*. Springer-Verlag New York, Inc. 2000.
- [9] Merlet, J-P. Singular configurations of parallel manipulators and grassmann geometry. *International Journal of Robotics Research*, 8(5):45-56,1989.
- [10] Merlet, J-P. Singular configurations of parallel manipulators and Grassmann Geometry, INRIA, Centre de Sophia Antipolis, 2004.
- [11] Merlet, J-P. Jacobian, Manipulability, Condition Number, and Accuracy of Parallel Robots. *Journal of Mechanical Design*, 2006.
- [12] Pottmann, H. Peternell, M. i Ravani B. An introduction to line geometry with applications. *Computed-Aided Design* 31, 1991.
- [13] Voglewede, P. Measuring Closeness to Singularities of Parallel Manipulators with Application to the Design of Redundant Actuation. Tesis doctoral, 2004.

- [14] Wolf, A. i Shoham, M. Investigation of parallel manipulators using linear complex approximation. *Journal of Mechanical Design*, 125:564-572, 2003.
- [15] Yoshikawa, T. Manipulability of Robotic Mechanisms. *Int. J. Robot. Res.* 4(2), pp. 3-9, 1985.

Bibliografia Complementària

- [16] Alberich-Carramiñana, M. Garolera, M. Thomas, F. i Torras, C. Flagged parallel manipulators. *IEEE Transactions on Robotics* 23(5):1013-1023, 2007.
- [17] Alberich-Carramiñana, M. Garolera, M. Thomas i F. Torras, C. Partially-flagged parallel manipulators: singularity charting and avoidance. *IEEE Transactions on Robotics*, 25(4):771-784, 2009.
- [18] Bandyopadhyay, S i Ghosal, A. An algebraic formulation of kinematic isotropy and design of isotropic 6-6 Stewart platform manipulators. *Mechanism and Machine Theory*, 43: 591-616, 2008.
- [19] Bandyopadhyay, S i Ghosal, A. An algebraic formulation of static isotropy and design of statically isotropic 6-6 Stewart platform manipulators. *Mechanism and Machine Theory*. 44: 1360-1370, 2009.
- [20] Bohigas, O. Numerical Computation and Avoidance of Manipulator Singularities. Tesi doctoral, 2013.
- [21] Fassi, I. Legnani, G. i Tosi, D. Geometrical Conditions for the Design of Partial or Full Isotropic Hexapods. *Journal of Robotic Systems*, 22(10), 507-518, 2005.
- [22] Legnani, G. Fassi, I. Giberti, H. Cinquemani, S. i Tosi, D. A new isotropic and decoupled 6-DoF parallel manipulator. *Mechanism and Machine Theory* 58: 64-81, 2012.
- [23] Legnani, G. Tosi, D. Fassi, I. Giberti, H. I Cinquemani, S. The "point of isotropy" and other properties of serial and parallel manipulators. *Mechanism and Machine Theory*, 45: 1407-1423, 2010.
- [24] Nawratil, G. New Performance Indices for 6R Robot Postures. European Conference on Mechanism Science, 2006.
- [25] Nawratil, G. The control number as index for Stewart Gough platforms. *Advances in Robot Kinematics - Mechanisms and Motion*(J. Lenaric, B. Roth eds.), pp 15-22, Springer, 2006.
- [26] Pech, A. Singularitats arquitecturals en robots paral·lels. Projecte de tesi doctoral, 2012.
- [27] Torras, C. Thomas, F. i Alberich-Carramiñana, M. Stratifying the singularity loci of a class of parallel manipulators. *IEEE Transactions on Robotics*, 22(1): 23-32, 2006.

- [28] Semple, J.G. i Kneebone, G.T. Algebraic Projective Geometry. *Oxford Claredon Press*, 1963.
- [29] Stramigioli, S. i Bruyninckx, H. Geometry and Screw Theory for Robotics. *IEEE ICRA*, 2001.
- [30] Tchón, K. Jakubiak, J. Grosch, P. i Thomas, F. Motion planning for parallel robots with non-holonomic joints.
- [31] Waldron, K.J. i Hunt, K.H. Series-Parallel Dualities in Actively Coordinated Mechanisms. *Int J. of Robotics Research*, vol.10, n.5, 1991.
- [32] World Wildlife Fund España, Observatorio de la electricidad. *Datos de Febrero del 2013*.

Fonts de les figures

Figura 2.1

Font: Extremitats de *Hydra Power Systems* (<http://www.hydrapowersystems.com>) i de *direct industry* (<http://www.directindustry.es/>).

Figura 2.3

Font: Extremitat de [5], secció 2, figura 1.

Figura 2.2

Font: Extremitat de [1], capítol 2, pàgina 10.

Figura 3.3

Font: Extremitat de [12], secció 2, figura 2.

Figura 3.1

Font: Extremitat de [12], secció 3, figura 3.

Figura 3.2

Font: Extremitat de [12], secció 4, figura 4.

Figura 3.4

Font: Extremitat de [1], capítol 2, secció 3, pàgina 17.

Figura 3.5

Font: Extremitat de [1], capítol 2, secció 3, pàgina 17.

Figura 3.6

Font: Extreta de [1], capítol 2, secció 3, pàgina 17.

Figura 3.7

Font: Extreta de [1], capítol 2, secció 3, pàgina 17.

Figura 6.1

Font: Pròpia.

Figura 6.2

Font: Pròpia.

Figura 6.3

Font: Pròpia.

Figura 6.5

Font: Pròpia.

Figura 6.4

Font: Extreta de [14], secció 2, figura 2(a).

Annex A

Proposicions

S'inclouen les proposicions demostrades de [3] que s'han mencionat en algun apartat.

Proposició A.0.1. *Si l i r són dues rectes coplanàries de \mathbb{P}^3 , llavors la recta formada per $\mathbf{p}(l)$ i $\mathbf{p}(r)$ és la imatge per \mathbf{p} del feix de rectes generat per l i r . Qualsevol recta de \mathbb{P}^5 continguda a \mathbb{G} és la imatge per \mathbf{p} del feix de rectes generat per dues rectes coplanàries diferents de \mathbb{P}^3 .*

Demostració. Sigui Π el pla generat per l i r , i $O = l \cap r$. Per la proposició 3.3.1, les rectes l i r són coplanàries, si i només si, L , la recta de \mathbb{P}^5 que passa per $\mathbf{p}(l)$ i $\mathbf{p}(r)$ està continguda a \mathbb{G} . Qualsevol punt de L és $\mathbf{p}(t)$, que són les coordenades de Plücker d'una recta de \mathbb{P}^3 , i a més a més aquesta recta, t , serà coplanària amb l i coplanària amb r . Sigui ara una recta s que talla alhora l i r . La seva imatge, $\mathbf{p}(s)$, és conjugada amb $\mathbf{p}(r)$ i $\mathbf{p}(l)$ i, per tant, també és conjugada amb $\mathbf{p}(t)$. De nou, com abans, s i t seran coplanàries també i es tallaran. Si es tria s que sigui de π però que $O \notin s$, aleshores els punts $t \cap l$, $t \cap r$, $t \cap s$ són de Π i almenys dos són diferents, i se segueix que $t \in \Pi$. Si, en canvi, es tria s tal que $O \in s$, però $s \notin \Pi$, llavors $t \cap s \subset \Pi \cap s = O$. I llavors ha de passar alhora que $O \in t$ i que $t \in \Pi$ i per tant t està al feix de rectes generat per l i r .

Per al recíproc, sigui t una recta de \mathbb{P}^3 , $t \neq l, r$, de manera que $O \in t \subset \Pi$. Es consideren tres punts alineats b_1, b_2, b_3 de, respectivament, l, r , i t , tots tres diferents de O ; llavors, els vectors coordenats de b_1, b_2, b_3 són linealment dependents. Si els vectors de Plücker de l, r i t es calculen a partir dels punts O, b_1, O, b_2 i O, b_3 , respectivament, aleshores es comprova que també són linealment dependents. Això demostra que $\mathbf{p}(l), \mathbf{p}(r), \mathbf{p}(t)$ són punts alineats. Ara només queda observar que qualsevol recta de \mathbb{G} està generada per dos punts $\mathbf{p}(l), \mathbf{p}(r)$, amb l i r diferents i coplanàries, gràcies a la proposició 3.3.1.

□

Proposició A.0.2. *Es compleix que:*

1. *Per qualsevol pla Π de \mathbb{P}^3 , la imatge per la immersió de Plücker del conjunt de totes les rectes de Π és un pla de \mathbb{P}^5 contingut a \mathbb{G} .*
2. *Per qualsevol punt O de \mathbb{P}^3 , la imatge per la immersió de Plücker del conjunt de totes les rectes que passen per O és un pla de \mathbb{P}^5 contingut a \mathbb{G} .*
3. *Els únics plans de \mathbb{P}^5 continguts a \mathbb{G} són els descrits a (1) i (2).*

Demostració. Siguin l_i $i = 1, 2, 3$ tres rectes no concurrents de π . Les seves coordenades de Plücker, $\mathbf{p}(l_i)$ seran punts diferents de \mathbb{G} . A més a més, no estan alineats, ja que, si ho estiguessin, generarien una recta continguda a \mathbb{G} i per la proposició anterior, serien concurrents, en contra del que se suposa. Com que les rectes són coplanàries, els punts $\mathbf{p}(l_i)$ són coplanaris i generen un pla Π de \mathbb{P}^5 contingut a \mathbb{G} . Però un punt $q = \mathbf{p}(l) \in \mathbb{G}$ és de Π si i només si és colinear amb $\mathbf{p}(l_1)$ i un punt $\mathbf{p}(l')$ de la recta generada per $\mathbf{p}(l_2)$ i $\mathbf{p}(l_3)$ i això passa si i només si l pertany al feix pla generat per l_1 i una recta l' del feix pla generat per l_2 i l_3 . La darrera condició és equivalent a $l \subset \pi$, per tant $\Pi = \mathbf{p}(\{l | l \subset \pi\})$, com es volia.

L'apartat (2) es demostra fent servir un argument similar. Si tres rectes, l_1 , l_2 i l_3 passen per un mateix punt O , es pren el pla generat Π per $\mathbf{p}(l_1)$, $\mathbf{p}(l_2)$ i $\mathbf{p}(l_3)$, que són punts no alineats pel mateix argument d'abans i conjugats dos a dos. Anàlogament a la demostració anterior, un punt $\mathbf{p}(l)$ de \mathbb{G} serà de Π si i només si és de la recta que passa per $\mathbf{p}(l_1)$ i per un punt de la recta generada per l_2 i l_3 . Això vol dir que l és del feix de rectes generat per l_1 i una recta l' del feix de rectes generat per l_2 i l_3 . Aquestes tres rectes passen totes per O i aleshores, l' , també contindrà a O , com es volia veure, per tant $\Pi = \mathbf{p}(\{l | O \in l\})$.

Per a (3), sigui Π un pla de \mathbb{G} i es prenen tres punts que el generin, $\mathbf{p}(l_i)$. Com que cada dos punts generen una recta continguda a \mathbb{G} que no conté el tercer punt, qualsevol parella de rectes l_i són coplanàries i no pertanyen al feix de rectes generat per les altres dues. Aleshores només pot passar que o bé l_1 , l_2 i l_3 pertanyen a un pla Π i són no concurrents, o bé passen totes per un punt O i no són coplanàries. Com ja s'ha vist que la representació de qualsevol d'aquests dos casos és un pla Π' a \mathbb{P}^5 , que conté els punts $\mathbf{p}(l_i)$, llavors aquest pla ha de ser exactament Π , com es volia veure.

□

Si dos plans de \mathbb{G} són del mateix tipus, aleshores la seva intersecció serà un punt. Prenent antiimatges es veu fàcilment, ja que si són de tipus (1), seran dos plans que s'intersequen en una recta, la imatge de la qual és un punt de \mathbb{G} , i si són de tipus (2), la intersecció del conjunt de rectes que passa per O amb el conjunt de rectes que passa per O' és la recta OO' , que té per imatge un punt de \mathbb{G} . Finalment, si són de diferent tipus, la seva intersecció serà, o bé el feix pla de rectes que passa per un punt O si el punt és del pla, i per tant, una recta de \mathbb{G} , o bé seran disjunts en cas que O no hi pertanyi, ja que no hi haurà cap recta a la intersecció.

Proposició A.0.3. *Les imatges per l'aplicació de Plücker de les rectes que tallen tres rectes donades que es creuen dos a dos, de \mathbb{P}^3 són els punts d'una secció plana no degenerada de \mathbb{G} . Qualsevol secció no degenerada de \mathbb{G} és d'aquesta forma.*

Demostració. Sigui S el conjunt de totes les rectes que tallen alhora l_1 , l_2 i l_3 . El conjunt S conté un nombre infinit de rectes diferents, que es creuen dos a dos. Una recta r talla l_1 , l_2 i l_3 si i nomès si $\mathbf{p}(r)$ és el conjugat de $\mathbf{p}(l_1)$, $\mathbf{p}(l_2)$ i $\mathbf{p}(l_3)$. Això passa si i nomès si $\mathbf{p}(r)$ pertany a la intersecció dels hiperplans relatius a \mathbb{G} , és a dir, $\mathbf{p}(S) = \mathbb{G} \cap V$ amb V la intersecció dels hiperplans polars,

$$\text{on } V = H_{\mathbf{p}(l_1)} \cap H_{\mathbf{p}(l_2)} \cap H_{\mathbf{p}(l_3)}.$$

Es veurà que V és un pla, i que $\mathbb{G} \cap V$ és una cònica no degenerada. Com que els punts $\mathbf{p}(l_1)$, $\mathbf{p}(l_2)$ i $\mathbf{p}(l_3)$ són diferents, no poden estar alineats ja que aleshores, tota la recta estaria continguda a \mathbb{G} , però ja s'ha vist com són totes les rectes contingudes a \mathbb{G} i no són d'aquesta forma. Per tant $\mathbf{p}(l_1)$, $\mathbf{p}(l_2)$ i $\mathbf{p}(l_3)$ són independents, i per tant, com que \mathbb{G} és no degenerada, també ho són els seus hiperplans polars; i llavors V és un pla. Com que S conté un nombre infinit de rectes que es creuen dos a dos, $\mathbb{G} \cap V$ conté infinits punts i cap recta. Per tant, dos punts diferents de $\mathbb{G} \cap V$, generen una recta no continguda a \mathbb{G} i per tant $\mathbb{G} \cap V$ és no degenerada. I és el que es volia veure.

Pel recíproc, se suposa que V és un pla i $\mathbb{G} \cap V$ és una cònica no degenerada amb punts. Siguin $\mathbf{p}(s_1)$, $\mathbf{p}(s_2)$ i $\mathbf{p}(s_3)$ tres punts diferents i no alineats de $\mathbb{G} \cap V$. Com que la cònica $\mathbb{G} \cap V$ és no degenerada, la recta generada per qualsevol parella dels punts anteriors, genera una recta no continguda a \mathbb{G} i per tant s_1 , s_2 i s_3 es creuen dos a dos. Siguin ara l_1 , l_2 i l_3 , tres rectes diferents que tallen totes, simultàniament, a s_1 , s_2 i s_3 . Aquestes rectes també es creuen dos a dos, ja que si no les rectes s_1 , s_2 i s_3 serien coplanàries. Per la part ja demostrada, les representacions de les rectes que tallen l_1 , l_2 i l_3 són punts d'una secció plana no degenerada $\mathbb{G} \cap V'$ de \mathbb{G} . Com que cada s_i talla simultàniament a totes les l_i , aleshores, $\mathbf{p}(s_1), \mathbf{p}(s_2), \mathbf{p}(s_3) \in V'$. Així doncs, $V' = V$, i $\mathbb{G} \cap V' = \mathbb{G} \cap V$, com es volia.

□

Annex B

Simulació complementària

Es realitzarà una simulació per una posició fixa variant l'anglatge fix d'un dels actuadors per veure la variació de l'angle. El que es farà serà, associant a l'actuador \mathcal{A}_1 la recta $y = z = 0$, variar la coordenada x de l'anclatge fix, mantenint la resta d'actuadors i anclatges sense moure. S'ha evitat el cas patològic en que l'anclatge fix i el mòbil coincideixin. El resultat de la simulació es mostra a continuació.

Com es pot veure a continuació, el valor de l'angle no és invariant per a diferents posicions de l'anclatge fix, encara que estigui sobre la mateixa recta.

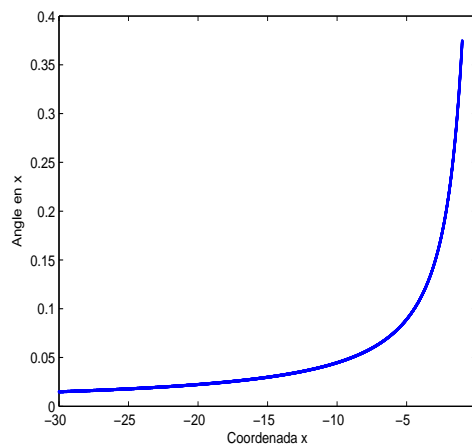


Figura B.1: Variació de l'angle per a la mateixa configuració del manipulador variant, sobre la mateixa recta, la posició de l'anclatge fix corresponent a l'actuador \mathcal{A}_1 .

Annex C

Programes en Matlab

C.1 Programa de càlcul de les coordenades de Plücker

Entrada: vectors de coordenades de dos punt de \mathbb{P}^3 . Sortida: coordenades de Plücker de la recta generada per aquests dos punts. function [p]=Plucker(a,b)

```
i=1;
k=1;
j=2;
while ij=3,
j=i+1;
while jj=4,
p(k)=a(i)*b(j)-a(j)*b(i);
j=j+1;
k=k+1;
end
i=i+1;
end
```

C.2 Programa de càlcul de les mesures

```
function [y,J,y1,r,h,d]=alpha(punts)
```

```
i=1;
```

```
j=1;
```

S'introdueix una matriu de punts, amb els punts posats en les columnes, de la forma a1 b1 a2 b2... a6 b6. La sortida dona y1, el vector dels angles de cada actuator; y, el mínim dels angles de y1; J, el valor del determinant de la jacobiana; r, la coordenada de l'angle mínim; h, el vector dels moments de cada actuator i d, el vector amb les distàncies a la polar de cada actuator.

```
while jj=11,
```

Es calculen les coordenades de Plücker dels punts.

```

p(:,i)=Plucker(punts(:,j),punts(:,j+1));
Es pren el representant normalitzat de les coordenades de Plücker.
p(:,i)=p(:,i)/sqrt(p(3,i)2+p(5,i)2+p(6,i)2);
j=j+2;
i=i+1;
end
Es calcula el determinant de la jacobiana.
J=det(p);
G(1,6)=1/2; G(6,1)=1/2; G(2,5)=-1/2; G(5,2)=-1/2;
G(3,4)=1/2; G(4,3)=1/2; j=1; r=1; while jj=6
Es troben els coeficients de les equacions pels conjugats a les coordenades de Plücker.
q(:,j)=transpose(p(:,j))*G;
j=j+1;
end j=1;
i=1;
y=2*pi;
while ij=6,
Per cada i, es calcula el conjugat a tots els actuadors menys  $\mathcal{A}_i$ ,  $x$ 
k=1;
if i==1,
k=2;
end
j=1;
while kj=6,
A(j,:)=q(:,k);
k=k+1;
if k==i,
k=k+1;
end
j=j+1;

```

end

Inici de la resolució del sistema d'equacions.

```

x(1)=1;
b=-A(:,1);
for n=1:5,
M(:,n)=A(:,n+1);
end
if det(M) =0,
s=M;
for n=1:5,
x(n+1)=s(n);

```


end

end

if det(M)==0,

x(2)=1;

b1=-A(:,2);

M1(:,1)=A(:,1);

for n=2:5,

M1(:,n)=A(:,n+1);

end

s1=M1 b1;

x(1)=s1(1);

for n=2:5,

x(n+1)=s1(n);

end

if det(M1)==0;

x(3)=1;

b2=-A(:,3);

M2(:,1)=A(:,1);

M2(:,2)=A(:,2);

for n=3:5,

M2(:,n)=A(:,n+1);

end

s2=M2 b2;

x(1)=s2(1);

x(2)=s2(2);

for n=3:5,

x(n+1)=s2(n);

end

if det(M2)==0,

x(4)=1;

b3=-A(:,4);

M3(:,1)=A(:,1);

M3(:,2)=A(:,2);

M3(:,3)=A(:,3);

for n=4:5,

M3(:,n)=A(:,n+1);

end

s3=M3 b3;

```
x(1)=s3(1);
x(2)=s3(2);
x(3)=s3(3);
for n=4:5,
x(n+1)=s3(n);
end
det(M3)
if det(M3)==0,

    x(5)=1;
    b4=-A(:,5);
    for n=1:4,
    M4(:,n)=A(:,n);
    end
    M4(:,5)=A(:,6);

    s4=M4 \ b4;
    for n=1:4,
    x(n)=s4(n);
    end
    x(6)=s4(5);
    if det(M4)==0,

        x(6)=1;
        b5=-A(:,6);
        for n=1:5,
        M5(:,n)=A(:,n);
        end
        s5=M5 \ b5;
        for n=1:5,
        x(n)=s5(n);
        end
        end
        end

    end

end

end
```

Fi de la resolució del sistema d'equacions.

Es calcula la matriu associada al nul-system.

```
N=[0 x(6) -x(5) x(4);-x(6) 0 x(3) -x(2); x(5) -x(3) 0 x(1); -x(4) x(2) -x(1) 0];
m=(2*i)-1;
coef=N*punts(:,m);
coef1=N*punts(:,m+1);
normal(1)=coef(1);
normal(2)=coef(2);
normal(3)=coef(3);
normal1(1)=coef1(1);
normal1(2)=coef1(2);
normal1(3)=coef1(3);
```

```
B(1,:)=normal;
B(2,:)=normal1;
```

```
vecim=cross(normal,normal1);
```

```
puntvecim=transpose(B [-coef(4);-coef1(4)]);
rectap=(punts(:,m+1)-punts(:,m));
recta(1)=rectap(1);
recta(2)=rectap(2);
recta(3)=rectap(3);
vec=recta;
```

```
puntvec(1)=punts(1,m);
puntvec(2)=punts(2,m);
puntvec(3)=punts(3,m);
Matriu=[vecim;vec;puntvecim-puntvec];
```

Càlcul de la distància(d)

```
if det(Matriu)==0,
d(i)=norm((puntvecim-puntvec)-(vecim/norm(vecim))*(transpose(puntvecim-puntvec))*vecim/norm(vecim))
else
unitari=(cross(vecim,vec))/norm(cross(vecim,vec));
d(i)=abs(unitari*transpose((puntvecim-puntvec)));
end
```

Càlcul del moment(h)

```
h(i)=abs(x*G*p(:,i))/norm(x*G);
```

Càlcul de l'angle

```
y1(i)=(pi/2)-abs(acos((recta*transpose(normal)/(norm(recta)*norm(normal)))));
if abs((180/pi)*acos((recta*transpose(normal)/(norm(recta)*norm(normal)))))>90,
a=pi-abs(acos((recta*transpose(normal)/(norm(recta)*norm(normal)))));
y1(i)=(pi/2)-a;
```

```

end

    if abs(y1(i))>abs(y),
y=y1(i);
r=i;

    end
i=i+1;
end

```

C.3 Programa de la simulació 6.1.1

Aquesta simulació i totes les que vénen a continuació simplement efectuen un moviment discretitzat, i en cada punt del moviment discretitzat, es calcula el valor de les mesures, de manera que hi haurà un vector de mesures per a cada mesura i per a cada actuator. $x=[0\ 0\ 0\ 0\ 2\ 3\ 5\ 7\ -4\ -8\ -10\ -11;0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1;0\ 0\ 0\ 0\ 4\ 6\ 8\ 10\ -7\ -2\ -14\ -9;1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1]$;

```

y=-1;
i=1;
x(1,2)=x(1,2)+y;

```

```

    while y<1
[r, J, y1, n, s, w] = alpha(x);
a(i)=r;
b(i)=(J);
d(i)=abs(J);
c(i)=abs(r);
e(i)=y;
g(i,:)=y1;
m(i)=n;
k(i,:)=s;
l(i,:)=w;
i=i+1;
x(1,2)=x(1,2)+0.0001;
y=y+0.0001;
end

```

C.4 Programa de la simulació 6.1.2

```

x=[1 0 -1 0 1 0 5 0 -4 -8 -10 -11;0 1 0 1 0 1 0 1 0 1 0 1;0 0 0 0 1 0 8 0 -7 -2 -14 -9;1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1];

```

```

y=-1;
i=1;
x(1,8)=x(1,8)+y;

    while y!=1,
[r, J, y1, n, s, w] = alpha(x);
a(i)=r;
b(i)=(J);
d(i)=abs(J);
c(i)=abs(r);
e(i)=y;
g(i,:)=y1;
m(i)=n;
k(i,:)=s;
l(i,:)=w;
i=i+1;
x(1,8)=x(1,8)+0.0001;
y=y+0.0001;
end

```

C.5 Programa de la simulació 6.1.3

```

x=[1 1 -1 2 1 -1 5 0 -4 -8 -10 -11;0 1 0 1 0 1 0 1 0 1 0 1; 0 1 0 2 1 0 2.5 3 -3 -2 -1.5 -3.2;1 1 1
1 1 1 1 1 1 1 1 1];
b1=(1/4)*(x(1,2)+x(1,4)+x(1,6)+x(1,8));
b3=(1/4)*(x(3,2)+x(3,4)+x(3,6)+x(3,8));
z=x;
i=1;
y=-1;

    while y!=1,
[r, J, y1, n, s, w] = alpha(x);
a(i)=r;
b(i)=(J);
d(i)=abs(J);
c(i)=abs(r);
e(i)=y;
g(i,:)=y1;
m(i)=n;
k(i,:)=s;
l(i,:)=w;
i=i+1;

```

```

x(1,2)=y*z(1,2)+b1;
x(1,4)=y*z(1,4)+b1;
x(1,6)=y*z(1,6)+b1;
x(1,8)=y*z(1,8)+b1;
x(3,2)=y*z(3,2)+b1;
x(3,4)=y*z(3,4)+b1;
x(3,6)=y*z(3,6)+b1;
x(3,8)=y*z(3,8)+b1;
y=y+0.0001;
end

```

C.6 Programa de la simulació 6.1.4

```

x=[-6 -1 -3 -1 -1 0 1 0 6 1 3 1;0 1 0 1 0 0.5 0 0.5 0 1 0 1;-4 0 5 0 -1 -0.5 -1 -0.5 -3 0 4 0;1 1 1
1 1 1 1 1 1 1 1 1];

```

```

mod=sqrt(2)/2;
alfa=pi;
x(2,6)=1+(mod*sin(alfa));
x(3,6)=mod*cos(alfa);
x(2,8)=x(2,6);
x(3,8)=x(3,6);

```

```

i=1;

```

```

while alfa<6*pi/4,
x(2,6)=1+(mod*sin(alfa));
x(3,6)=mod*cos(alfa);
x(2,8)=x(2,6);
x(3,8)=x(3,6);
[r, J, y1, n, s, w] = alpha(x);
a(i)=r;
b(i)=(J);
d(i)=abs(J);
c(i)=abs(r);
e(i)=alfa;
g(i,:)=y1;
m(i)=n;
k(i,:)=s;
l(i,:)=w;
i=i+1;

```

```
    alfa=alfa+0.0001;  
end
```